С. СТОИЛОВ

ЛЕКЦИИ О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS
SUR LES
PRINCIPES TOPOLOGIQUES
DE LA
THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PROFESSEES
A LA SORBONNE ET A L'UNIVERSITÉ DE CERNAUTI

PAR

S. STOÏLOW
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

Deuxième édition
Augmentée de notes sur les fonctions analytiques
et leurs surfaces de Riemann

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, quai des Grands-Augustins, 55

1956

С. СТОИЛОВ

ЛЕКЦИИ О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Перевод с французского Е. И. СТЕЧКИНОЙ
с предисловием Б. В. ШАБАТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.2
С 81
УДК 517.535.2

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Традиционным заказчиком теории аналитических функций, вызвавшим к жизни многие разделы этой теории, особенно ее геометрические разделы, всегда была гидродинамика. Однако за последние десятилетия скорости движения изучаемых в гидродинамике объектов возросли настолько, что от условия несжимаемости жидкости пришлось отказаться, и этот отказ привел к неприменимости классических методов теории аналитических функций. Да и в самой теории аналитических функций появились задачи, которые для своего решения требуют рассмотрения функций более общих, чем аналитические.

Поэтому значительно усилился интерес к различного рода обобщениям теории аналитических функций. С точки зрения геометрической теории функций естественны лишь такие обобщения, которые сохраняют наиболее глубокие, то есть топологические, свойства аналитических функций.

Известному румынскому математику Симеону Стоилову (1887—1961) еще в 1928 г. удалось найти наиболее общий класс отображений, для которых сохраняются топологические свойства отображений, осуществляемых аналитическими функциями [1]). Эти отображения, названные С. Стоиловым «внутренними», получили широкое распространение в математической литературе последних лет.

Поясним сказанное несколько подробнее.

---

[1]) Отметим, что несколько ранее Стоилова, по существу, тот же класс был введен венгерским математиком К. Сцилардом (1927); однако последний не подверг этот класс столь глубокому исследованию.

Класс внутренних в смысле Стоилова отображений определяется весьма просто: он состоит из всех непрерывных отображений, преобразующих открытые множества в открытые и не сводящих в точку континуумы, отличные от точки. Классические теоремы теории аналитических функций — принцип сохранения области и теорема единственности — показывают, что любая аналитическая функция осуществляет внутреннее отображение. Более того, так как свойства, определяющие рассматриваемый класс, не нарушаются при гомеоморфизмах, то и любая функция, которая получается из аналитической гомеоморфным преобразованием аргумента, также осуществляет внутреннее отображение. С другой стороны, важнейшее свойство класса внутренних отображений выражается знаменитой теоремой Стоилова, по которой любая функция, осуществляющая такое отображение, после некоторого гомеоморфного преобразования аргумента переходит в аналитическую функцию. Иными словами, внутренние отображения — это произвольные отображения вида $w = f[T(z)]$, где f — аналитическая функция, а T — гомеоморфизм. В этом смысле функции, осуществляющие внутренние отображения, и являются топологически эквивалентными аналитическим, а совокупность их свойств — совокупностью топологических свойств аналитических функций.

Ясно, что всякое обобщение аналитических функций, при котором сохраняются топологические свойства последних, не должно выводить из класса функций, осуществляющих внутренние отображения. Поэтому теория внутренних отображений весьма важна для всех, кто интересуется обобщениями теории аналитических функций как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

Симеону Стоилову принадлежит также общая топологическая трактовка римановых поверхностей как накрывающих поверхностей сферы. В отличие от понятия абстрактной римановой поверхности в смысле Г. Вейля и Т. Радо, эта трактовка позволяет изучать элементы, связанные со способом накрытия (точки ветвления, листы и т. п.).

Предлагаемая в русском переводе монография С. Стоилова вышла первым изданием в 1938 г. в знаменитой серии Бореля; в 1956 г. она была переиздана с добавлением некоторых работ автора — с этого издания и сделан перевод.

В ней с присущим Стоилову педагогическим мастерством излагаются основные результаты теории, созданной автором. Монография состоит из небольшого топологического введения и двух частей, посвященных теории римановых поверхностей и топологической теории аналитических функций. Автор очень умело переходит от наглядных геометрических и конкретных аналитических фактов к построению общей абстрактной теории.

Эта монография в двух французских изданиях завоевала мировую известность и послужила толчком для целого ряда исследований по обобщениям теории аналитических функций — области, которая и сейчас интенсивно развивается и в которой осталось еще очень многое сделать. Можно надеяться, что русское издание лекций Стоилова привлечет к этой области внимание новых молодых сил.

Симеон Стоилов был не только замечательным математиком, но также человеком большой души и огромного личного обаяния.

Пусть эта книга напомнит читателям светлый образ ее автора.

Б. В. Шабат

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Это переиздание моих *Лекций о топологических принципах теории аналитических функций* является фотокопией книги, вышедшей в 1938 г., и отличается от нее лишь тремя небольшими примечаниями, помещенными в конце первоначального текста и дополняющими его в некоторых пунктах[1]). Таким образом, здесь не смогли найти отражение вышедшие после 1938 г. многочисленные работы, относящиеся к топологии аналитических функций одного комплексного переменного и, в частности, к внутренним отображениям, изучению которых посвящены две последние главы этой книги. В качестве общего обзора по этим вопросам я рекомендую читателям книгу G. T. Whyburn'а «Analitic Topology», которая содержит большое количество результатов, полученных в теории отображений абстрактных пространств. Кроме того, в важной монографии Неванлинна «Униформизация» изложена топологическая теория накрывающих поверхностей.

Я считаю полезным включить в это второе издание несколько моих статей и заметок, тесно связанных с настоящей книгой. Эти работы, неоднократно использовавшиеся в последние годы различными авторами, были опубликованы в периодических изданиях, которые не всегда доступны.

С. Стоилов

Бухарест, сентябрь 1955

---

[1]) В переводе эти примечания внесены в текст. *(Прим. перев.)*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Первые топологические факты в теории аналитических функций появились с введением римановых поверхностей. Этот геометрический объект, тесно связанный с идеей аналитического продолжения и с понятием области существования аналитической функции, обладает некоторыми топологическими свойствами, то есть свойствами, инвариантными относительно любого взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения (топологического отображения). Этим чисто качественным свойствам римановых поверхностей соответствуют вполне определенные общие свойства функций, составляющие топологическую основу теории аналитических функций.

Введенный Риманом геометрический объект сразу же приобрел неоценимое значение для изучения функций. Однако само понятие *римановой поверхности* могло быть строго определено во всей своей общности лишь благодаря развитию теории абстрактных пространств и топологических многообразий[1]). В связи с этим возникла необходимость первую главу настоящих *Лекций* посвятить изложению некоторых топологических понятий.

Значительное место в ней отведено теореме Брауэра об инвариантности открытого множества при топологических отображениях n-мерных многообразий. Хотя впоследствии мы будем пользоваться этой теоремой

---

[1]) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Лейпциг — Берлин, 1913). См. также T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche (Acta Szeged, т. II, 1925).

Полностью уточняя смысл понятия *поверхности,* теория абстрактных, многообразий a posteriori устанавливает законность выражения, принятого для обозначения введенного Риманом понятия.

лишь для $n = 2$ (случай, для которого доказательство можно провести гораздо проще), тем не менее я счел своим долгом изложить здесь общую теорему Брауэра, и не только из-за той фундаментальной роли, которую она играет в теории отображений многообразий, но и потому, что она дает возможность предугадать некоторые возможные обобщения исследований, изложенных в двух последних главах настоящей работы.

Доказательству теоремы Брауэра предшествует лемма Лебега, очень интересная сама по себе и занимающая важное место в современной топологии. В последнее время были получены относительно простые доказательства этой леммы.

Вторая глава содержит данное a priori абстрактное определение понятия римановой поверхности, которое отличается от определения Вейля и Радо тем, что использует понятие непрерывного накрытия, позволяя тем самым (без обращения к триангуляции) различать листы и точки ветвления. Это определение будет упрощено в V главе при помощи понятия внутреннего отображения. Здесь же оно используется при доказательстве теоремы существования функции, соответствующей заданной римановой поверхности. Общая идея изложенного в этой книге доказательства принадлежит Куранту и Фату.

Изучение топологических свойств римановых поверхностей составляет содержание третьей главы. Известно, что эти многообразия характеризуются топологически при помощи простых и, так сказать, естественных ствойств: в самом деле, триангулируемость и ориентируемость двумерного топологического многообразия ведет к существованию гомеоморфизма между этим многообразием и некоторой римановой поверхностью, и обратно. Чтобы сделать смысл этих свойств более наглядным, мы разобрали несколько примеров неориентируемых поверхностей и нетриангулируемых многообразий.

Таким образом, проблема отыскания различных топологических типов для римановых поверхностей совпадает с проблемой топологической классификации ориентируемых поверхностей. Этому вопросу и посвя-

щена четвертая глава. Решение, данное уже давно Жорданом для случая замкнутых поверхностей, было дополнено Керекьярто для произвольных поверхностей, и здесь изложена его теорема. Мы поместили ее с небольшими изменениями в деталях и опустили случай неориентируемых поверхностей, который не входит в план этих *Лекций.*

Так же как топология двумерных многообразий связана с характеристикой и топологической классификацией римановых поверхностей, непрерывные отображения этих многообразий приводят к аналогичным проблемам для аналитических функций. В самом деле, аналитическая функция определяет отображение своей римановой поверхности R в сферу S, на которой определены значения функции, и если подвергнуть R произвольному топологическому преобразованию, то получится класс топологических отображений, эквивалентных аналитическим функциям.

Определить этот класс непосредственно при помощи одних лишь его топологических свойств — значит дать топологическую характеристику аналитических функций.

Пятая глава целиком посвящена этой проблеме. Понятие внутреннего отображения приводит к ее решению, так же как понятие ориентируемой поверхности приводит к решению аналогичного вопроса для римановых поверхностей.

Внутреннее отображение[1]) некоторого многообразия V в другое многообразие W есть непрерывное отображение, переводящее всякое множество, открытое в V, во множество, открытое в W, и не переводящее никакой отличный от точки континуум[2]) в точку.

Последняя глава содержит приложения этого понятия к вопросам теории функций и к вопросам топологии поверхностей.

---

[1]) S. Stoïlow, Annales scientifiques de l'École Norm. sup., т. 45, 1928, стр. 348.

[2]) В этой монографии автор, говоря о континууме, всегда имеет в виду континуум, отличный от точки. В переводе это оговаривается там, где это существенно. *(Прим. ред.)*

Значение внутренних отображений для теории функций заключается в следующей теореме, доказанной в V главе: если V — произвольное двумерное топологическое многообразие и W — евклидова сфера, то всякое внутреннее отображение (I) многообразия V в сферу становится аналитической функцией, а V — ее римановой поверхностью, *если ввести в V надлежащую метрику*. Другими словами: всегда существует такое топологическое отображение V на риманову поверхность R, преобразующее (I) в аналитическую функцию, для которой R служит римановой поверхностью.

Следовательно, топологическими свойствами аналитических функций, полностью характеризующими их с качественной точки зрения, являются инвариантность открытого множества и инвариантность континуума. Важная роль, которую играет здесь инвариантность открытого множества, заставляет обратить внимание на связь этого вопроса с теоремой Брауэра из первой главы: действительно, с топологической точки зрения аналитические функции возникли как естественное обобщение гомеоморфных отображений.

Из сформулированной выше теоремы вытекает определенная топологическая классификация аналитических функций. Так, если многообразие V подобно однолистному (Schlichtartig), то внутреннее отображение можно заменить однозначной функцией, применив хорошо известную теорему Кёбе; если V замкнуто, то функция будет алгебраической. Эту классификацию, естественно, можно продолжить, но при этом мы будем получать лишь классы аналитических функций, отличающихся *топологической* природой своих римановых поверхностей или своей областью существования.

Проблема топологической характеристики аналитических функций (известная под названием проблемы Брауэра) может быть в конечном итоге рассмотрена с различных точек зрения. Мы будем здесь придерживаться той постановки проблемы, к решению которой приводит понятие внутреннего отображения и которую можно было бы довольно точно определить как «проблему топологического распределения значений анали-

тических функций на их римановых поверхностях». С той же точкой зрения связано и понятие топологической инволюции Брауэра[1]), которое уже дает решение для случая рациональных и автоморфных функций. Таким образом, эти исследования представляют собой нечто вроде топологического продолжения метрической теории распределения значений, которая берет свое начало в теореме Пикара.

Рассматривая проблему с различных точек зрения, Керекьярто получил в последние годы очень интересные результаты, относящиеся к топологической характеристике взаимно однозначных конформных отображений замкнутых ориентируемых поверхностей на себя. Для знакомства со всеми результатами, относящимися к этому вопросу, мы отсылаем читателя к работам самого автора, который дал также обзор и полную библиографию по этому вопросу в своем докладе в Женеве, опубликованном в «L'Enseignement mathématique» (1936).

Общая точка зрения, которой мы здесь придерживаемся, ведет, быть может, к тому заключению философского порядка, что достаточно простые сведения, относящиеся к чистой топологии, могут вполне естественным путем привести если не к самому понятию аналитической функции (что было бы невозможно, так как последнее — понятие метрическое), то по крайней мере к топологиечским эквивалентам аналитических функций, то есть к топологическим основам теории функций.

С другой стороны, в настоящих *Лекциях* я рассчитываю как можно нагляднее показать, в какой степени некоторые основные результаты теории функций не зависят от метрического характера конформного отображения, осуществляемого этими функциями. Между излагаемыми здесь чисто топологическими теориями и классической теорией аналитических функций лежит вся последовательность дополнительных гипотез, все более и более ограничительных. Важность этих гипотез и

---

[1]) L. E. Brouwer, Amsterdam Akad. Versl., т. 27, стр. 1201 и Mathem. Annalen, т. 80, стр. 39.

их значение можно оценить по работам, которые были посвящены им всюду в течение последних лет. Я же ограничусь тем, что назову здесь глубокую теорию Альфорса поверхностей наложения и прекрасные результаты М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях.

Мне остается поблагодарить Э. Бореля за согласие опубликовать эти *Лекции* в своей серии, пользующейся с давних пор доброй славой, а также издательство Готье-Виллар за труды по изданию этой книги.

Черновцы, июнь 1937

С. Стоилов

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТОПОЛОГИИ

I. Топологическое пространство и основные понятия, связанные с ним

Важнейшим понятием как топологии, так и общей теории функций является понятие топологического пространства. Множество E элементов произвольной природы может быть названо пространством лишь в том случае, когда для любого его подмножества — прямым или косвенным путем — определено понятие предельного элемента. Такое определение должно удовлетворять некоторой системе условий (*аксиом* пространства), которую можно выбрать многими способами. Мы примем здесь систему аксиом, которая ведет к понятию топологического пространства, лежащего в основе почти всей современной топологии. С одной стороны, это пространство является настолько общим, что содержит все типы полезных или интересных для приложений пространств, а с другой стороны, его система аксиом — одна из самых простых.

1. Топологическое пространство. Пусть E — множество произвольных элементов, которые мы будем называть точками. Каждому подмножеству $A \subset E$ поставим в соответствие по определенному закону множество $A' \subset E$. Точки множества A' назовем *предельными точками множества* A, а само множество A' — *производным множеством множества* A.

Множество E будем называть *топологическим пространством* (или часто просто пространством), если

закон соответствия между A и A' удовлетворяет следующим условиям:

I. Для любых множеств A и B, содержащихся в E,

$$A' + B' = (A + B)',$$

где $(A + B)'$ — производное множество для $A + B$.

II. Множество, состоящее из одной точки, имеет производным пустое множество.

III. Для любого множества $A \subset E$

$$A'' \subset A',$$

где A'' — производное множество для A' [1]).

Эти три аксиомы определяют понятие топологического пространства. Из первых двух аксиом сразу вытекает несколько следствий:

1° Если

$$A \subset B,$$

то

$$A' \subset B'.$$

Это следует непосредственно из аксиомы I.

2° Производное множество пустого множества пусто. В самом деле, пустое множество, содержащееся в любом множестве, содержится и в множестве, состоящем из одной точки, производное множество которого пусто на основании аксиомы II.

3° Множество, состоящее из конечного числа точек (конечное множество), имеет производным пустое множество. Это следует из аксиом I и II.

4° Для любого конечного n

$$(A_0 + A_1 + \ldots + A_n)' = A'_0 + A'_1 + \ldots + A'_n.$$

Это соотношение получается в результате n-кратного применения аксиомы I.

---

[1]) В таком виде три условия были сформулированы Фреше (см. Espaces abstraits, Париж, 1928, стр. 185), который назвал E *достижимым* пространством. То же пространство названо Куратовским (Topologie, I, Львов — Варшава, 1933, стр. 15) «пространством 1», а Александровым и Хопфом (Topologie, Берлин, 1935, стр. 50) — «T_1-пространством».

2. Замыкание множества. *Замыканием* множества A называется множество

$$A + A'.$$

Оно обозначается через $\bar{A}$.

Легко видеть, что:

I_1. Для любых множеств A и B

$$\bar{A} + \bar{B} = \overline{A + B},$$

где $\overline{A + B}$ — замыкание множества $A + B$.

II_1. Замыкание множества, состоящего из одной точки, есть само множество.

III_1. Для любого A

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A},$$

где $\bar{\bar{A}}$ — замыкание множества $\bar{A}$.

В самом деле, I_1 получается из I простым сложением; II_1 является следствием определения замыкания и аксиомы II; III_1 — следствием того же определения и аксиом I и III.

Утверждения I_1, II_1 и III_1 можно было бы взять в качестве аксиом топологического пространства (аксиом замыкания или аксиом Куратовского), как это делает Куратовский в цитируемой выше работе. Определенное таким образом пространство совпадает с топологическим пространством, введенным в п. 1. Поскольку отправным понятием здесь будет уже не производное множество, а замыкание, то предельная точка множества A будет определяться следующим образом: точка $a \in \bar{A}$ называется предельной точкой множества A, если

$$\overline{A - a} = \bar{A}.$$

Тогда производное множество будет удовлетворять условиям I, II и III, которые становятся следствием трех аксиом замыкания.

В настоящей работе мы предпочли положить в основу аксиомы производного множества, а не аксиомы замыкания, так как понятие предельной точки представляется нам во многом более близким и естественным,

чем понятие замыкания; к тому же оно чаще встречается в различных разделах математического анализа.

Из свойств 1°, 2°, 3° и 4°, пользуясь определением замыкания, сразу получаем аналогичные свойства для замыканий. Их можно было бы получить и непосредственно из аксиом замыкания, если бы пространство было определено при помощи этих аксиом. Но мы не будем останавливаться на этом новом определении топологического пространства, а предложения I_1, II_1 и III_1 будем считать доказанными теоремами.

3. Замкнутые множества; открытые множества. Множество F называется *замкнутым*, если

$$F' \subset F.$$

Это условие эквивалентно тому, что

$$\bar{F} = F.$$

Следовательно, аксиома III утверждает, что всякое производное множество замкнуто, а теорема III_1 — что замыкание любого множества замкнуто.

Дополнением множества A называется множество точек пространства, не принадлежащих A; его обозначают через CA. Очевидно, что дополнением множества CA является само множество A.

Дополнение замкнутого множества называется *открытым* множеством.

Для любых множеств A справедливы соотношения:

$$\left.\begin{aligned} C(A_0+A_1+\ldots) &= CA_0\cdot CA_1\cdot\ldots,\\ C(A_0\cdot A_1\cdot\ldots) &= CA_0+CA_1+\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Из определения замкнутого множества и условия 4° следует, что если множества $F_1, F_2, \ldots, F_n$ замкнуты, то

$$(F_1+F_2+\ldots+F_n)' = F_1'+F_2'+\ldots+F_n' \subset F_1+ \\ +F_2+\ldots+F_n,$$

то есть что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Точно так же, если $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — открытые множества, то первое из соотношений (1) и предыдущий

результат, относящийся к множествам F, показывают, что пересечение (общая часть) $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n$ конечного числа открытых множеств открыто. Для бесконечного числа множеств эти два предложения, вообще говоря, не имеют места.

Пусть F — замкнутое множество и $A \subset F$. Тогда

$$A' \subset F \tag{2}$$

в силу 1° и того, что

$$F' \subset F.$$

Значит, если $F_1, F_2, \ldots$ — замкнутые множества, образующие бесконечное семейство, и A — общая часть этих множеств, то (2) выполняется для каждого F_i из этого семейства, и, следовательно, $A' \subset A$. Отсюда получаем, что пересечение бесконечного числа замкнутых множеств замкнуто (или пусто).

Учитывая этот факт и беря в качестве множеств A во втором из соотношений (1) замкнутые множества, получаем следующее предложение: объединение бесконечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Очевидно, что эти два последних предложения верны и для конечного числа множеств.

С другой стороны, заметим, что соотношения (1) отнюдь не предполагают, что множества A образуют счетное семейство. Эти соотношения, вытекающие из определений объединения, пересечения и дополнения множеств, справедливы для любого семейства множеств A. Следовательно, если рассматривать любую бесконечную систему множеств в топологическом пространстве, то пересечение этих множеств замкнуто, если каждое из множеств замкнуто; объединение множеств открыто, если каждое множество открыто.

4. Множество может быть одновременно открытым и замкнутым. Таково, например, множество, состоящее из всех точек пространства, а значит, и пустое множество. Вообще, каково бы ни было множество точек пространства, одновременно замкнутое и открытое, таким же должно быть и его дополнение, на основании данного нами определения открытого множества. Следовательно,

если существует *собственное*[1]) подмножество пространства, одновременно замкнутое и открытое, то таких множеств в этом пространстве существует по крайней мере два. Всякое топологическое пространство, не содержащее собственных подмножеств, одновременно замкнутых и открытых, называется *связным пространством*. Таково, например, обычное трехмерное пространство, которое нельзя разбить на два непустых подмножества без общих точек так, чтобы они оба были одновременно замкнутыми (или оба открытыми). Однако если из обычного пространства исключить точки сферы, то полученное пространство уже не будет связным; внутренность и внешность сферы будут одновременно замкнуты и открыты в пространстве, в котором производное множество определяется, как в обычном пространстве, только точки сферы исключаются.

5. Окрестность точки. Окрестностью точки в топологическом пространстве называется любое открытое множество[2]) этого пространства, содержащее данную точку. Между понятием окрестности и понятием предельной точки имеется прямая связь, выражаемая следующим свойством:

Если a — предельная точка множества A, то в любой ее окрестности найдется хотя бы одна точка множества A, отличная от a. Обратно, если это условие выполняется, то a есть предельная точка множества A.

В самом деле, пусть G — окрестность точки a, не содержащая ни одной точки из A, отличной от a. Докажем, что в таком случае a не может быть предельной точкой для множества A. Положим

$$F = CG.$$

Так как F замкнуто и G, по предположению, не содержит точек из $A - a$, то

$$A - a \subset F. \tag{3}$$

---

[1]) Под собственным мы понимаем подмножество, дополнение которого не пусто.

[2]) Иногда полезно принимать более широкое определение. Нам же будет достаточно того, которое принято здесь.

Если $a \in A$, то $(A - a) + a = A$, откуда в силу I и II

$$(A - a)' = A'. \tag{4}$$

Если же $a \overline{\in} A$, то соотношение (4) обращается в тождество. Следовательно, оно справедливо для любой точки a. Но так как F замкнуто, то формула (3) и свойство 1° из п. 1 показывают, что

$$(A - a)' \subset F,$$

откуда в силу (4) получаем, что

$$A' \subset F,$$

то есть никакая предельная точка множества A не может принадлежать G, и, значит, точка a не может быть предельной точкой множества A, что противоречит условиям теоремы.

Обратно, предположим, что в любой окрестности точки a найдется хотя бы одна точка из A, отличная от a. Докажем, что тогда a будет предельной точкой множества A.

Действительно, в силу (4) замыкание $\overline{A - a}$ можно разложить следующим образом:

$$\overline{A - a} = (A - a) + A'. \tag{5}$$

Допустим, что $a \overline{\in} A'$. Тогда (5) показывает, что $a \overline{\in} \overline{A - a}$. С другой стороны, из (5) следует, что все точки множества A, отличные от a, входят в $\overline{A - a}$. Дополнение этого множества открыто. Оно содержит точку a и не содержит ни одной точки из A, отличной от a. Но это противоречит условиям теоремы, и, значит, a должна быть предельной точкой множества A.

Таким образом, доказанная теорема дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка a была предельной точкой множества A. Если в ее формулировке слова «предельная точка» заменить словами «точка множества $\overline{A}$», то, вычеркивая слова «отличная от a», мы получим теорему, дающую необходимое и достаточное условие того, чтобы $a \in \overline{A}$.

6. При определении топологического пространства можно в качестве первичного вместо понятия предельной

точки, как в п. 1, или понятия замыкания, как в п. 2, взять понятие окрестности. В этом случае предельная точка определяется при помощи только что доказанного свойства.

Можно сформулировать аксиомы окрестности, которые будут определять то же самое топологическое пространство, что и аксиомы п. 1 и п. 2 (см. Фреше, цитированная выше работа, стр. 186). Топологическое пространство Хаусдорфа (Хаусдорф, Теория множеств, 1937) является понятием более узким, чем определенное здесь топологическое пространство.

Геометрическое определение предельной точки в обычном пространстве, которое дается обычно при помощи сфер с центром в этой точке, является весьма частным случаем данного нами определения: рассматриваемые здесь a priori окрестности и будут именно этими сферами.

7. Внутренняя и внешняя точки множества. Граница. *Внутренней точкой* множества A, лежащего в топологическом пространстве E, называется точка из A, принадлежащая открытому в E множеству, содержащемуся в A (то есть точка, обладающая окрестностью, содержащейся в A). Множество внутренних точек множества A образует *внутренность множества* A.

Внешней точкой множества A называется внутренняя точка дополнения множества A. Следовательно, если точка принадлежит CA, то это еще не значит, что она будет внешней для A: она лишь не принадлежит A.

Точки пространства, не являющиеся ни внешними, ни внутренними для множества A, называются *граничными точками* A. Совокупность этих точек составляет *границу множества* A.

Всякая граница есть замкнутое множество. Действительно, множество внутренних точек A открыто, как объединение открытых множеств (окрестностей внутренних точек множества A). С другой стороны, внешние точки множества A также образуют открытое множество. Объединение этих двух открытых множеств снова образует открытое множество; граница же, как его дополнение, замкнута.

Так как определение внутренних и внешних точек взаимно относительно A и CA, то ясно, что граница множества A является в то же время границей и для CA.

Замкнутое множество содержит свою границу. Открытое же множество, напротив, не содержит ни одной своей граничной точки.

Изолированная точка множества A (то есть точка множества A, не являющаяся предельной) всегда является его граничной точкой. Если a — изолированная граничная точка множества A, то для CA она будет точкой внутренней границы. Такая точка отличается от других граничных точек множества CA тем, что она не является предельной точкой множества A. Вообще, внутренней границей множества A называется совокупность таких его граничных точек, которые не являются предельными для внешних точек этого множества. Например, для множества, состоящего из всех точек плоскости, за исключением некоторого отрезка прямой, этот отрезок будет внутренней границей.

Точка внутренней границы множества A будет внутренней для $\bar{A}$, и это свойство точек внутренней границы отличает их от других граничных точек множества A. Отсюда следует, что замкнутое множество не может иметь внутренней границы.

8. Компактное множество. В топологии понятие компактного множества заменяет понятие ограниченного множества в обычном пространстве. Так как в топологическом пространстве понятие ограниченного множества не имеет смысла, то в качестве свойства, характеризующего определяемое понятие, берут одно из наиболее существенных свойств этих множеств, а именно свойство, выражаемое классической теоремой Больцано — Вейерштрасса.

Множество A, лежащее в топологическом пространстве, называется *компактным* (или, точнее, компактным *в* этом пространстве), если любое его бесконечное подмножество имеет по крайней мере одну предельную точку, которая может и не принадлежать множеству A [1]).

---

[1]) *Конечное* множество будем считать компактным.

Легко видеть, что объединение конечного числа компактных множеств снова компактно. Для объединения бесконечного числа компактных множеств этого может и не быть.

9. Компактное пространство. Если само топологическое пространство компактно, то оно обладает рядом важных свойств, делающих его обобщением *замкнутой* поверхности. Любое бесконечное множество в этом пространстве всегда имеет по крайней мере одну предельную точку. Примером компактного пространства может служить сфера, если рассматривать ее как пространство с обычным определением производных множеств. Напротив, обычная евклидова плоскость не будет компактным пространством. Последовательность точек, лежащих на окружностях с фиксированным центром и радиусами, возрастающими в арифметической прогрессии, не имеет предельной точки (при обычном определении этого понятия на плоскости).

10. Относительные понятия. Все понятия, определявшиеся до сих пор, относились к топологическому пространству E, в котором рассматривались различные подмножества и их связь с пространством или между собой. Но мы можем любое множество $E_1 \subset E$ рассматривать как самостоятельное топологическое пространство, перенося определение предельной точки из пространства E в пространство E_1 следующим образом: будем говорить, что точка $a \in E$ есть предельная точка множества $A \subset E_1$ *относительно* E_1, если: 1) a является предельной точкой множества A относительно E (то есть удовлетворяет определению, принятому для E) и 2) $a \in E_1$.

Согласно условию 1) всякая точка, предельная относительно E_1, будет предельной точкой того же множества относительно E, в то время как обратное не всегда имеет место ввиду условия 2).

Взяв теперь E_1 в качестве пространства, мы можем определить понятие замыкания, замкнутого и открытого множеств и другие понятия предыдущих пунктов *относительно* E_1.

Множество, замкнутое относительно E_1 (или замкнутое в E_1), не обязано быть замкнутым (в E); но если

оно замкнуто, то оно заведомо будет замкнутым во всяком содержащем его множестве, принадлежащем E. То же самое имеет место и для множеств, открытых относительно E_1. Все эти заключения основаны на том, что любое замкнутое в E_1 (или открытое в E_1) множество есть не что иное, как общая часть множества, обладающего тем же свойством (в E), и множества E_1. Значит, если E_1 замкнуто, то множества, замкнутые в E_1, совпадают с замкнутыми множествами, лежащими в E_1; точно так же, если E_1 открыто, то множества, открытые в E_1, совпадают с открытыми множествами, лежащими в E_1.

В противоположность тому, что мы говорили о множествах замкнутых и открытых, множество, лежащее в E_1 и компактное в нем, компактно в E, что следует непосредственно из определения компактности. Однако множество, компактное в E, может и не быть компактным в $E_1 \subset E$. Например, множество точек прямой с абсциссами $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, компактное на всей прямой, не будет компактным на положительной полупрямой. Но если E_1 замкнуто, то множества, компактные в E_1, совпадают с множествами, лежащими в E_1 и компактными в E. Всякое множество, компактное в себе, является компактным пространством в смысле предыдущего пункта, и обратно.

11. Континуум, открытая область, замкнутая область. Множество $A \subset E$ называется связным, если, рассматриваемое как топологическое пространство, оно будет связным в смысле определения, данного в п. 4.

Замкнутое связное множество пространства E называется *континуумом* в E.

Открытое связное множество пространства E называется *открытой областью* или просто *областью* в E.

Всякое замкнутое множество точек из E, обладающее тем свойством, что множество его внутренних точек образует область и все его граничные точки являются предельными для точек этой области, называется *замкнутой областью*.

Если к открытой области присоединить ее границу, то получится замкнутая область. Точно так же любая

замкнутая область может быть получена этим способом из множества своих внутренних точек.

Понятия, определенные в этих пунктах, играют в дальнейшем существенную роль. Хотя мы будем пользоваться ими лишь для частного вида пространств, а именно для многообразий, тем не менее основные свойства, характеризующие эти понятия, справедливы в любых топологических пространствах.

12. Непрерывное отображение. Пусть X и Y — любые топологические пространства. Если каждой точке x пространства X поставлена в соответствие определенная точка y пространства Y, то говорят, что определено отображение X *в* Y или преобразование X *в* Y. Если при этом каждая точка y пространства Y соответствует по крайней мере одной точке x пространства X, то говорят, что имеется отображение X *на* Y или преобразование X *на* Y. Точка y, соответствующая точке x, называется ее *образом*. Множество образов точек некоторого множества из X называется образом этого множества.

Отображение одного пространства в другое есть не что иное, как весьма широкое обобщение понятия функции, причем X играет роль области изменения независимого переменного, а Y — области изменения зависимого переменного.

Отображение X в Y записывается, по аналогии с классическим обозначением функции, следующим образом:

$$y = f(x).$$

Образ множества $A \subset X$ обозначается через $f(A)$. Множество точек из X, образами которых служат точки множества $B \subset Y$, обозначается через $f^{-1}(B)$. Те же самые обозначения используются и для случая, когда множества A и B сводятся к одной точке.

Понятие предельной точки в X и Y позволяет нам определить то, что следует понимать под *непрерывным отображением* X в Y. Чтобы оставаться как можно ближе к классическому определению непрерывной функции по Коши, мы воспользуемся понятием окрестности, связь которого с понятием предельной точки выражена в теореме п. 5.

Отображение $y = f(x)$ называется непрерывным в *точке* x, если для любой окрестности V_y точки y — образа точки x — существует такая окрестность U_x точки x, что

$$f(U_x) \subset V_y.$$

Говорят, что отображение непрерывно на множестве $A \subset X$ (в частности, A может совпадать с X), если оно непрерывно в каждой точке этого множества. Это определение, как легко видеть, построено по образцу классического определения; оно основано на теореме п. 5.

Понятие непрерывного отображения X в Y можно определить и непосредственно, минуя определение непрерывности в точке.

Для того чтобы $y = f(x)$ было непрерывно на X, необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого множества $F \subset Y$ множество

$$f^{-1}(F)$$

было также замкнутым.

Условие необходимо. Если бы при замкнутом $F \subset Y$ множество

$$f^{-1}(F)$$

не было замкнутым, то нашлась бы по крайней мере одна предельная точка a этого множества, не принадлежащая ему. Пусть $b = f(a)$; точка b не может принадлежать F, а так как F замкнуто, то должна существовать окрестность точки b, пусть V_b, не содержащая ни одной точки из F. Но $f(x)$ непрерывна в a; поэтому существует окрестность U_a точки a такая, что

$$f(U_a) \subset V_b.$$

Так как a — предельная точка множества $f^{-1}(F)$, то окрестность U_a должна содержать точки из $f^{-1}(F)$, образы которых принадлежат F. Но это невозможно, и, следовательно, a не может лежать вне $f^{-1}(F)$, что означает замкнутость этого множества.

Условие достаточно. Если бы отображение не было непрерывным в X, то в X нашлась бы хоть одна точка a, в которой оно разрывно. Пусть снова $b = f(a)$.

Существует такая окрестность V_b точки b, что любая окрестность U_a точки a содержит хотя бы одну точку x_U, для которой $f(x_U)$ не входит в V_b. Значит, все точки $f(x_U)$ (для всех окрестностей U_a точки a) лежат в множестве

$$Y - V_b,$$

которое замкнуто, так как V_b открыто. Множество

$$f^{-1}(Y - V_b)$$

замкнуто по условию. Но это множество содержит все x_U, для которых a является предельной точкой, и, значит, точка a должна быть предельной для множества $f^{-1}(Y - V_b)$, которое, будучи замкнутым, должно содержать a. Но в таком случае $b = f(a)$ должна принадлежать $Y - V_b$, что невозможно, так как $b \in V_b$. Следовательно, точка разрыва a не может существовать, и отображение непрерывно.

Это условие, характеризующее непрерывные отображения на всем пространстве X, может служить их определением.

Пользуясь определением открытого множества, легко показать, что в только что доказанной теореме можно *замкнутое множество* заменить *множеством открытым*.

13. Что касается свойств, обратных предыдущим, то они справедливы, вообще говоря, не для всякого непрерывного отображения, то есть если F — произвольное замкнутое множество в X, то множество $f(F)$ не обязано быть замкнутым в Y. Например, отображение

$$y_1 = e^{x_1} \cos x_2, \; y_2 = e^{x_1} \sin x_2$$

плоскости X с координатами (x_1, x_2) в плоскость Y с координатами (y_1, y_2) отображает полупрямую

$$x_1 \leqslant 0, \; x_2 = 0,$$

являющуюся замкнутым множеством в X, на множество

$$0 < y_1 \leqslant 1, \; y_2 = 0,$$

которое уже не будет замкнутым в Y.

Точно так же не всякое непрерывное отображение переводит любое открытое множество пространства X в открытое же множество пространства Y. Например, в принятых выше обозначениях отображение

$$y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2$$

преобразует любое открытое множество плоскости X, пересекаемое осью x_2, в множество, которое уже не будет открытым в плоскости Y.

Непрерывные отображения, переводящие открытые множества в открытые, будут играть важную роль в V главе, где они будут использованы для топологической характеристики аналитических функций комплексного переменного.

14. Топологические отображения. В предыдущих пунктах мы предполагали, что отображение X в Y однозначно в одну сторону, а именно от x к y. Точка $y \in Y$ может, вообще говоря, соответствовать многим точкам $x \in X$, образующим конечное или бесконечное множество. Предположим теперь, что отображение $y = f(x)$ пространства X в пространство Y однозначно *в обе стороны* (взаимно однозначно) и что отображение

$$x = f^{-1}(y),$$

ставящее в соответствие каждому $y \in Y$ определенный элемент $x \in X$, непрерывно в Y. Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства X в пространство Y называется *топологическим отображением* X на Y или топологическим *соответствием* между X и Y.

Два пространства или два множества, расположенные в одном или в двух различных пространствах, называются *гомеоморфными*, если между ними можно установить топологическое соответствие. Гомеоморфные множества (или пространства) должны рассматриваться как топологически эквивалентные. Два множества, гомеоморфные третьему, гомеоморфны между собой. Гомеоморфизм в топологии означает то же, что равенство фигур в элементарной евклидовой геометрии, проективная эквивалентность в проективной геометрии или отображение с сохранением углов в конформной геометрии.

Всякое свойство множества, остающееся инвариантным при произвольном топологическом отображении, называется *топологическим* (или дескриптивным) *свойством* множества. Топологические свойства — это чисто качественные свойства фигур. Они совершенно не зависят от измерений и связаны лишь с непрерывностью.

Если пространство X топологически отображается на некоторое подмножество Y_1 пространства Y, то Y_1 топологически эквивалентно X. Если рассматривать Y_1 как пространство, то его свойства с топологической точки зрения будут такими же, как свойства X. Но если рассматривать Y_1 совместно с пространством Y, в которое оно погружено, то не всем свойствам Y_1 будут отвечать соответствующие свойства X. Свойства Y_1 как подмножества Y называются топологическими свойствами Y_1 *относительно* пространства Y и являются инвариантными при всяком топологическом отображении Y, переводящем Y в Z, а множество Y_1 в множество $Z_1 \subset Z$. Иными словами, всяким свойством Y_1 относительно Y обладает также Z_1 относительно Z. Особое место среди них занимают свойства Y_1, общие для всех гомеоморфных Y_1 топологических пространств. Эти свойства можно назвать *абсолютными* (или внутренними), так как они зависят лишь от элементов, принадлежащих Y_1, и не зависят от пространства, в которое оно погружено[1]).

15. *Евклидовым пространством*[2]) (*n измерений*) называется множество E_n, в котором элементы (точки) определяются упорядоченной системой произвольных действительных чисел

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

а предельные точки — при помощи *евклидова расстояния*; именно, точка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется предель-

---

[1]) Первые из этих свойств называют иногда «относительными свойствами» или «свойствами положений», а последние — «внутренними свойствами». См., например, P. Alexandroff und H. Hopf, цит. соч., стр. 2.

[2]) Эти пространства называют также *декартовыми* или еще *числовыми*. Хотя эти названия во многих отношениях более обоснованы, чем название «евклидово пространство», мы предпочитаем последнее, как наиболее употребительное.

ной точкой множества $A \subset E_n$ в пространстве E_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует по крайней мере одна точка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из A, отличная от $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и такая, что

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - \alpha_i)^2} < \varepsilon.$$

Известно, что это определение предельных точек удовлетворяет аксиомам I, II и III п. 1. Следовательно, евклидово пространство E_n есть частный случай топологического пространства, определенного в настоящей главе. Это показывает также (что логически следовало бы вывести из анализа аксиом), что топологические пространства существуют, то есть наша система аксиом не является противоречивой. Впрочем, это легко показать, построив много других пространств, гораздо более общих, чем E_n.

Отметим здесь только один очень важный класс пространств, содержащий пространства E_n, — класс метрических пространств (или дистанционных пространств, по терминологии Фреше).

Метрическое пространство — это пространство, в котором можно ввести расстояние и с его помощью определить предельные точки точно так же, как мы делали это выше для E_n.

Это расстояние должно удовлетворять условиям:

1° Для любых двух точек a и b расстояние $\rho(a, b) > 0$, если $a \neq b$, и $\rho(a, b) = 0$, если эти точки совпадают.

2° $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ для любых a и b.

3° Если a, b и c — любые три точки пространства, то имеет место неравенство треугольника

$$\rho(a, b) + \rho(b, c) \geqslant \rho(a, c).$$

Не всякое топологическое пространство метризуемо[1]).

[1]) Говорят, что топологическое пространство *метризуемо,* если в нем можно определить расстояние (метрику), удовлетворяющее приведенным выше условиям 1°, 2° и 3°, так, чтобы все открытые по отношению к этой метрике множества и только они были открытыми множествами исходного пространства. *(Прим. ред.).*

В метризуемом пространстве можно указать различные способы введения метрики, удовлетворяющей условиям 1°, 2° и 3°, которые приводят к тем же предельным точкам, то есть определяют одно и то же топологическое пространство. В E_n, рассматриваемом как топологическое пространство, можно, как известно, определить расстояние посредством других величин, непрерывно зависящих от евклидова расстояния.

16. *Топологическим многообразием* (n измерений) или просто *многообразием* будем называть связное топологическое пространство, в котором каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной n-мерному евклидову пространству, и которое удовлетворяет *аксиоме отделимости* Хаусдорфа:

для любых двух различных точек пространства существуют их непересекающиеся окрестности.

Следовательно, многообразие характеризуется тем, что в окрестности каждой точки оно ведет себя топологически, как n-мерное евклидово пространство, и однородностью, которая вытекает из того, что во всех точках многообразия n одно и то же. Поэтому говорят, что многообразие есть однородное локально евклидово пространство.

Таким образом, многообразия отличаются от евклидовых пространств не *локальными* свойствами (которые у них одинаковы), а *глобальными*. Эти весьма разнообразные свойства определяют различные топологические типы многообразий одинаковой размерности. Аксиома отделимости существенна при изучении этих глобальных свойств и используется далее при доказательстве некоторых из них.

Глобальным свойством некоторых многообразий является, например, их компактность. Такие многообразия называются замкнутыми в противоположность некомпактным многообразиям, называемым открытыми. Сфера и евклидова плоскость могут служить наиболее простыми примерами замкнутого и открытого двумерных многообразий. Тор служит примером замкнутого многообразия иного топологического типа, чем сфера; тор, из которого исключено некоторое замкнутое множество, является примером открытого многообразия, тип которого отличен от евклидовой плоскости.

II. Топологическая инвариантность открытых множеств в n-мерных многообразиях. Теорема Брауэра

1. Прежде чем приступить к доказательству важной теоремы Брауэра, приведем несколько определений и элементарных фактов, относящихся к n-мерному евклидову пространству.

Рассмотрим в этом пространстве $n+1$ фиксированных точек P_i с координатами $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i$, выбранных так, чтобы не существовало справедливого для всех i соотношения вида

$$K_1 x_1^i + K_2 x_2^i + \ldots + K_n x_n^i + K_{n+1} = 0,$$

где K_i — постоянные, не все равные нулю. Это условие означает, что точки P_i не лежат в одном и том же $(n-1)$-мерном многообразии, содержащемся в E_n. Иными словами, точки P_i линейно независимы.

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$ — такие $n+1$ действительных неотрицательных чисел, что

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+1} = 1. \tag{1}$$

Если представить μ_i как массу, сосредоточенную в точке P_i, то в силу (1) центр тяжести системы точек P_i будет иметь координаты

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x_j^i. \tag{2}$$

Если заставить μ_i принимать всевозможные неотрицательные значения, удовлетворяющие условию (1), то точка Q с координатами ξ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) опишет замкнутое компактное множество T_n пространства E_n, называемое обобщенным тетраэдром или n-мерным *симплексом.* Для $n = 3$ это будет тетраэдр в обычном пространстве, для $n = 2$ — плоский треугольник, а для $n = 1$ — отрезок прямой. Точки P_i являются *вершинами* симплекса T_n. Если мы положим m коэффициентов μ_i равными нулю, то, как легко видеть, получим множество точек симплекса T_n, которое представляет собой $(n-m)$-мерный симплекс; он называется *$(n-m)$-мерной гранью* симплекса T_n. Существует $n+1$ граней T_n

размерности $n-1$ и столько же 0-мерных, являющихся вершинами симплекса T_n [1]). Координаты любой точки из E_n можно представить в виде (2), так как точки P_i были выбраны линейно независимыми. Но только для точек T_n все коэффициенты μ_i будут неотрицательными. Легко видеть также, что T_n есть замкнутая область пространства E_n с границей, образованной множеством граней всех размерностей.

2. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать конечное число симплексов t_n^i с диаметрами [2]), меньшими ε, либо не имеющих друг с другом общих точек, либо имеющих одну общую грань и удовлетворяющих соотношению [3])

$$\sum_i t_n^i = T_n.$$

В самом деле, предположим, что это свойство, очевидное для $n=1$, доказано для $n-1$; покажем, что тогда оно остается справедливым и для n.

Для этого рассмотрим разбиение всех $(n-1)$-мерных граней T_n на симплексы t_{n-1}^i с диаметрами, меньшими заданного $h>0$, удовлетворяющее поставленным выше условиям. Такое разбиение существует, так как $(n-1)$-мерные грани являются симплексами той же размерности. Пусть Q — центр тяжести системы T_n, если предположить, что в вершинах T_n распределены равные массы. Соединим точку Q отрезками прямых со всеми точками одного из t_{n-1}^i; эти отрезки образуют n-мерный симплекс $\mathfrak{S}_n^i$ с вершинами в точке Q и в вершинах симплекса t_{n-1}^i. Если таким же способом построить $\mathfrak{S}_n^i$ для всех симплексов t_{n-1}^i, то Q будет об-

---

[1]) Ясно, что всякая r-мерная грань будет гранью всех содержащих ее s-мерных граней $(s > r)$.

[2]) *Диаметром* множества называется верхняя грань расстояний между двумя любыми точками множества. Очевидно, что это понятие имеет смысл только в метрических пространствах.

[3]) Условимся, что всякий раз, когда мы будем производить разбиение симплекса T_n на более мелкие симплексы, оно будет удовлетворять этим условиям. Такое разбиение называется симплициальным.

щей вершиной для всех таких $\mathfrak{S}_n^i$, составляющих в сумме симплекс T_n. Любые два $\mathfrak{S}_n^i$ будут иметь либо общую грань, проходящую через Q, либо только эту точку. В самом деле, аналогичное условие выполняется, по предположению, для любой $(n-1)$-мерной грани T_n, то есть для t_{n-1}^i, а способ построения $\mathfrak{S}_n^i$ показывает, что оно должно выполняться и для этих симплексов.

Проделаем теперь с $\mathfrak{S}_n^i$ то же самое, что мы проделали только что с T_n, с той лишь разницей, что вместо h мы возьмем $h/2$; далее, с полученными симплексами поступим точно так же, взяв $h/3$, и так далее, беря диаметры разбиений $(n-1)$-мерных граней этих симплексов соответственно меньше: $\frac{h}{4}$; $\frac{h}{5}$, ... Тогда при достаточно большом k диаметры разбиения T_n на k-м шаге сделаются меньше ε. Это легко показать при помощи классического рассуждения, опираясь на то, что диаметр граней полученных таким способом симплексов стремится к нулю, и на элементарные свойства центра тяжести.

3. Лемма Лебега. Теорема об инвариантности открытого множества при топологических отображениях n-мерных многообразий была доказана Брауэром в 1912 г.[1]). В 1898 г. Шенфлис[2]) доказал теорему для частного случая $n=2$, но распространение этого доказательства на общий случай представляло большие трудности и могло быть осуществлено лишь с применением новых методов.

Общая теорема тесно связана с проблемой размерности евклидовых пространств, решение которой является одним из наиболее важных следствий этой теоремы. В 1911 г. Лебег[3]) сформулировал лемму, которая имеет к тому же большое самостоятельное значение и ведет непосредственно к решению проблемы размерности.

---

[1]) Mathematische Annalen, т. 71, стр. 305.

[2]) Nachrichten Goettingen, стр. 282. Доказательства этой теоремы для $n=2$ были опубликованы в том же журнале (1900, стр. 94) Осгудом и (стр. 98) Ф. Бернштейном.

[3]) Mathematische Annalen, т. 70, стр. 166.

Доказанная позже со всей строгостью Брауэром и самим Лебегом, эта лемма привела также к доказательству общей теоремы Брауэра о топологической инвариантности открытых множеств, которой и посвящен настоящий раздел. Поэтому мы начнем с изложения леммы Лебега и приведем здесь наиболее простое доказательство, полученное Е. Шпернером[1]) в 1928 г.

Вот формулировка леммы Лебега:

Пусть G — открытое ограниченное множество в E_n и F_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — r замкнутых множеств, покрывающих G, то есть таких, что каждая точка множества G принадлежит по крайней мере одному из F_i. Тогда можно указать такое положительное число h, что если диаметр каждого из F_i будет меньше h, то в G найдется точка, принадлежащая не менее чем $n+1$ множествам F_i.

Так как G открыто в E_n, то оно содержит n-мерный симплекс T_n, который *тем более* покрыт множествами F_i. Из этих множеств мы выберем только такие, которые содержат точки симплекса T_n; их число обозначим снова через r.

Возьмем теперь столь малое $h > 0$, чтобы всякое множество диаметра, меньшего h, удовлетворяло следующим двум условиям:

1° Если множество содержит вершину симплекса T_n, то оно не должно содержать ни одной точки грани, противоположной этой вершине. Под гранью, противоположной вершине P симплекса T_n, понимают $(n-1)$-мерную грань этого симплекса, не содержащую точку P.

2° Множество не может иметь общие точки одновременно со всеми $(n-1)$-мерными гранями симплекса T_n.

Условию 1°, очевидно, легко удовлетворить. Что же касается условия 2°, то достаточно вспомнить о существовании такого $d > 0$, что сумма расстояний от любой точки E_n до $n+1$ $(n-1)$-мерных граней симплекса T_n

---

[1]) Abhandlungen des Mathem. Sem. Hamburg, т. VI, 1928, стр. 265. Аналогичное доказательство было независимо дано В. Гуревичем (Mathematische Annalen, т. 101, 1929, стр. 210).

всегда больше d. Тогда для $h < \frac{d}{n+1}$ условие 2° будет выполнено.

Предположив при этих условиях, что диаметры множеств F_i меньше h, сведем число r (которое в этом случае $\geqslant n+1$) точно к $n+1$.

Пусть F_1 — одно из множеств F_i, содержащее вершину P_1; F_2 — одно из множеств F_i, содержащее вершину P_2, и так далее, F_{n+1} — одно из множеств F_i, содержащее последнюю вершину P_{n+1} симплекса T_n. В силу условия 1° никакое из выбранных таким образом множеств

$$F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$$

не может совпадать ни с одним другим множеством этой системы. Далее, из всех множеств F_i, для которых $i > n+1$, выберем множества, не имеющие ни одной общей точки с гранью T^1_{n-1}, противоположной вершине P_1, и объединим эти множества с F_1. Полученное таким образом объединение составляет некоторое замкнутое множество Φ_1. Затем из всех F_i $(i > n+1)$, не вошедших в Φ_1, выберем такие, которые не имеют общих точек с гранью T^2_{n-1}, противоположной вершине P_2. Вместе с F_2 они образуют замкнутое множество Φ_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность замкнутых множеств

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n+1},$$

содержащих все F_i. В самом деле, условие 2° показывает, что каждое множество F_i входит в какое-нибудь Φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$. С другой стороны, никакое F_i не войдет более чем в одно Φ_k. В результате мы получили $n+1$ множеств Φ_k, удовлетворяющих следующим трем условиям, которые только и будут использоваться в дальнейших рассуждениях:

a) Эти множества замкнуты.

b) Они покрывают T_n.

c) Множество Φ_k содержит вершину P_k симплекса T_n и не имеет общих точек с гранью T_{n-1} симплекса T_n, противоположной вершине P_k.

Так как каждое F_i содержится не более чем в одном из Φ_k, то для доказательства леммы достаточно показать, что все множества Φ_k имеют по крайней мере одну общую точку, принадлежащую T_n.

Для этого разобьем T_n на конечное число симплексов t_n^i, диаметр каждого из которых меньше ε, способом, указанным в п. 2. Каждой вершине симплекса t_n^i поставим в соответствие целое число из последовательности

$$1, 2, \ldots, n+1,$$

определенное следующим образом. Всякая вершина, в силу условия b), содержится по крайней мере в одном Φ_k; поставим ей в соответствие наименьший из индексов Φ_k, содержащих эту вершину. Если этот индекс есть α, то назовем данную вершину *вершиной* α. Каждой грани симплекса t_n^i поставим в соответствие числа, соответствующие всем ее вершинам. Получим грани $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, аналогично вершинам α. Так как порядок чисел в предыдущих скобках несуществен, то мы будем располагать их в неубывающей последовательности.

Теперь, следуя Шпернеру, покажем, что если выполнены условия a), b) и c), то число симплексов $(1, 2, \ldots, n+1)$ (то есть таких симплексов, все вершины которых имеют различные индексы) *нечетно* для любого разбиения t_n^i симплекса T_n. После этого лемма может быть доказана при помощи очень простого рассуждения.

Для случая $n=1$ наше утверждение проверить легко. В этом случае T_n есть отрезок T_1, и условие c) показывает, что вершинами его будут вершина 1 и вершина 2. С другой стороны, отрезки разбиения t_1^i образуют цепочку, составляя в сумме отрезок T_1. Очевидно, что среди этих t_1^i должно быть нечетное число таких, которые имеют вид $(1, 2)$.

Предположим, далее, что доказываемое свойство выполняется для $n-1$, и покажем, что тогда оно остается справедливым и для n. Рассмотрим некоторый симплекс t_n^i и его грани $(1, 2, \ldots, n)$. Если тако-

вые существуют, то они могут быть двух типов: одни имеют своей противоположной вершиной вершину $n+1$, а другие — вершину α, где α — одно из чисел 1, 2, ..., n. В t_n^i заведомо не может существовать более одной грани первого типа. Если же имеется грань второго типа, то их будет две и только две: в самом деле, в этом случае мы можем в качестве вершины взять вершину α из противоположной грани и получим снова грань (1, 2, ..., n). Все другие перемещения приводят к граням, не имеющим вида (1, 2, ..., n). Пусть μ — общее число граней вида (1, 2, ..., n) для всех t_n^i. Тогда

$$\mu = \nu + 2\lambda, \tag{3}$$

где ν — число граней первого типа, а 2λ — число граней второго типа.

Подсчитаем теперь число μ другим способом. Грани (1, 2, ..., n) симплексов t_n^i лежат либо внутри T_n, либо на одной из его граней. Первые из них принадлежат всегда одновременно двум t_n^i и потому входят в μ всегда в четном числе. Грани (1, 2, ..., n) симплексов t_n^i, лежащие на границе T_n, могут, в силу условия c), находиться лишь на грани (1, 2, ..., n) симплекса T_n, а таковая, в силу условий b) и c), очевидно, единственна. Но эта грань симплекса T_n сама является $(n-1)$-мерным симплексом, и условия a), b) и c) выполняются для нее так же, как и для T_n. Мы предположили, что утверждение верно для $n-1$, следовательно, число граней (1, 2, ..., n) симплексов t_n^i, лежащих на границе T_n, нечетно, и, значит, μ также нечетно. Но отсюда и из (3) сразу получаем, что ν нечетно. А так как в симплексе типа (1, 2, ..., $n+1$) имеется лишь одна грань типа (1, 2, ..., n), то число таких симплексов тоже нечетно.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ в T_n найдется хотя бы один симплекс типа (1, 2, ..., $n+1$). Возьмем убывающую последовательность $\{\varepsilon_n\}$, сходящуюся к нулю; всякая предельная точка симплексов (1, 2, ..., $n+1$), с одной стороны, принадлежит T_n, а с другой стороны, будет предельной для каждого Φ_k;

но Φ_k, по условию a), замкнуты, поэтому эта точка принадлежит всем Φ_k, и лемма доказана.

Замечание. Как мы уже указывали, все это рассуждение опирается лишь на условия a), b) и c), которым удовлетворяют Φ_k. Малость диаметров множеств F_i, о которых шла речь в формулировке леммы, служила лишь для построения множеств Φ_k, обладающих свойствами, необходимыми в процессе доказательства. Это замечание понадобится нам в дальнейшем.

4. Число $n+1$, фигурирующее в лемме Лебега, не может быть увеличено; в самом деле, можно построить примеры конечных систем сколь угодно малых множеств F_i, покрывающих ограниченную область пространства E_n и таких, что никакая точка области не принадлежит одновременно более чем $n+1$ из этих множеств.

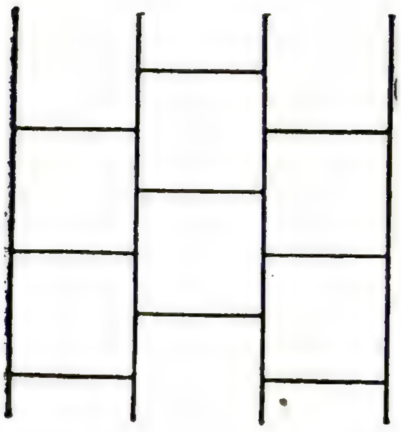

Рис. 1.

На рисунке 1 показано, как можно разбить плоскость на квадраты таким образом, чтобы никакая точка плоскости не принадлежала более чем трем квадратам.

Этот метод может быть обобщен на случай евклидова пространства E_n произвольной размерности n[1]).

Тогда для любой ограниченной области из E_n найдется лишь конечное число покрывающих ее гиперкубов и не существует точек области, принадлежащих более

---

[1]) H. Lebesgue, Fundamenta Mathematicae, т. II, стр. 266. Разобьем E_n на гиперкубы $\varepsilon N_i \leq x_i \leq \varepsilon(N_i+1)$, где N_i — целые. Достаточно применить к гиперкубу N_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ перенос, который переводит начало координат в точку:

$$x_1 = N_2 \frac{\varepsilon}{2} + N_3 \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + N_n \frac{\varepsilon}{2^{n-1}},$$

$$x_2 = N_3 \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + N_n \frac{\varepsilon}{2^{n-1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1} = N_n \frac{\varepsilon}{2^{n-1}},$$

$$x_n = 0.$$

чем $n+1$ из этих кубов. Размеры гиперкубов можно выбрать сколь угодно малыми; это показывает, что число $n+1$ не может быть увеличено.

Мы построим сейчас аналогичный пример разбиения, которым воспользуемся в дальнейшем. Рассмотрим n-мерный симплекс T_n и точку Q внутри него. Пусть δ_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ — расстояние от точки Q до $(n-1)$-мерной грани T^i_{n-1} симплекса T_n, противоположной вершине P_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$. Определим замкнутое множество F_i как совокупность точек M симплекса T_n, для которых

$$\rho\left(M, T^i_{n-1}\right) \geqslant \delta_i$$

и

$$\rho\left(M, T^h_{n-1}\right) \leqslant \delta_h \quad \text{при} \quad h < i;$$

здесь $\rho(A, B)$ обозначает евклидово расстояние между множествами A и B, то есть $\inf\limits_{a \in A,\, b \in B} \rho(a, b)$.

Для $i=1$ множество определяется одним первым условием, а для $i>1$ имеется, кроме того, $i-1$ условий, выражаемых вторым неравенством. Каждое определенное таким образом множество F_i содержит вершину P_i, и каждая вершина P_i содержится только в множестве F_i с тем же индексом. Кроме того, очевидно, что никакое F_i не содержит ни одной точки, принадлежащей грани T^i_{n-1}.

Точка Q — единственная точка, принадлежащая всем F_i. Действительно, общие точки F_1 и F_2 лежат на гиперплоскости, определяемой соотношением

$$\rho\left(M, T^1_{n-1}\right) = \delta_1;$$

общие точки F_2 и F_3 лежат на гиперплоскости, для которой

$$\rho\left(M, T^2_{n-1}\right) = \delta_2,$$

и так далее. Следовательно, всякая точка, общая всем F_i, должна принадлежать всем этим гиперповерхностям, а таким свойством обладает лишь точка Q.

Разобьем теперь T_n на симплексы t^j_n с диаметрами, меньшими ε, и, выбирая в t^j_n некоторую внутреннюю

точку q_j, построим для каждого симплекса t_n^j множества f_i^j аналогично тому, как мы делали выше для T_n. Затем множества f_i^j, построенные для всех t_n^j, объединим в множества Φ_p следующим образом: если p — вершина одного из t_n^j, то все f_i^j, содержащие p, объединим в одно множество Φ_p. Тогда каждой вершине p будет соответствовать одно Φ_p, а именно то, которое ее содержит; каждому же Φ_p будет соответствовать одна вершина p — та, которая в нем содержится. Диаметры множеств Φ_p будут меньше 2ε, так как каждое множество f_i^j является частью соответствующего симплекса t_n^j и, следовательно, имеет диаметр, меньший ε.

По построению множества Φ_p обладают следующими свойствами: 1) их конечное число, 2) все они замкнуты, 3) диаметр каждого из них меньше 2ε, и 4) они покрывают T_n. Покажем, что они удовлетворяют, кроме того, условию 5) всякая точка симплекса T_n содержится не более чем в $n+1$ множествах Φ_p, и только точки q_j содержатся точно в $n+1$ множествах. В самом деле, для точек, внутренних к t_n^j, это очевидно: внутри этих симплексов Φ_p совпадает с одним из f_i^j, а как мы показали выше, q_j — единственная точка, принадлежащая $n+1$ множествам[1]). Что же касается точек, лежащих на грани симплекса t_n^j, то такая точка может принадлежать лишь множествам Φ_p, соответствующим вершинам этой грани. Действительно, никакие f_i^j, а значит, и никакие Φ_p не могут содержать одновременно вершину и точки противоположной ей грани. Но грань симплекса t_n^j имеет n вершин, и. следовательно, не более чем n множеств Φ_p содержат эту точку.

Пять свойств множеств Φ_p показывают, что эти множества осуществляют экстремальный случай леммы Лебега для T_n, так как в качестве ε можно взять любое положительное число.

---

[1]) Мы переносим здесь на t_n^j то, что было установлено выше для T_n; это законно в силу определения t_n^j.

5. От случая симплекса T_n легко перейти к случаю n-мерной гиперсферы, расположенной в $(n+1)$-мерном пространстве E_{n+1}. Для этого достаточно применить предыдущие рассуждения не к T_n, а к множеству n-мерных граней симплекса T_{n+1} и осуществить затем простое топологическое отображение (например, центральную проекцию) границы симплекса T_{n+1} на гиперсферу. При топологическом отображении все свойства Φ_p сохраняются, а если взять их диаметры достаточно малыми, то диаметры Φ_p для гиперсферы будут меньше ε[1]).

Это замечание будет использовано при доказательстве теоремы Брауэра, к которой мы сейчас приступаем.

6. Вот формулировка этой теоремы:

Всякое топологическое отображение двух множеств, лежащих в многообразиях одинаковой размерности, любой внутренней точке одного из множеств ставит в соответствие внутреннюю точку другого множества. Тем самым открытому множеству одного многообразия соответствует открытое множество другого.

Пусть сначала A и B — два множества, лежащие соответственно в двух n-мерных евклидовых пространствах (или в одном и том же), и пусть существует топологическое отображение этих множеств одного на другое. Предположим, что одно из них, например A, обладает внутренней точкой Q, и пусть Q' — ее образ в B. Нужно доказать, что Q' — внутренняя точка множества B.

Так как Q — внутренняя точка множества A, то существует симплекс T_n, лежащий целиком в A и содержащий точку Q внутри. В множестве B образом симплекса T_n будет замкнутое ограниченное множество τ. Покажем, что Q' является внутренней точкой множества τ. Для этого рассмотрим $n+1$ замкнутых множеств F_i (обозначенных тем же символом, что и в п. 4),

---

[1]) Аналогичное покрытие можно получить также для всего E_n, но только при помощи Φ_p, удовлетворяющих лишь условиям 2)—5). Для этого достаточно разбить E_n на достаточно малые симплексы и повторить для них рассуждение, проведенное для t_n^j.

покрывающих T_n и имеющих лишь одну общую точку Q. Заданное топологическое отображение переводит множество F_i в $n+1$ замкнутых множеств F'_i, покрывающих τ и имеющих лишь одну общую точку Q'. Допустим, что Q' лежит на границе τ. Для того чтобы доказать, что это невозможно, мы покажем, что в этом случае можно так изменить F'_i в окрестности[1]) точки Q', чтобы новые множества, осуществляющие покрытие τ (снова замкнутые, и число их снова равно $n+1$), не имели ни одной общей всем им точки. Но тогда в силу гомеоморфизма множеств τ и T_n на T_n найдутся $n+1$ множеств, покрывающих T_n, не имеющих ни одной точки, общей всем этим множествам, и отличающихся от F_i лишь в окрестности точки Q. Значит, эти новые множества, так же как и F_i, будут удовлетворять условиям a), b) и c) п. 3, а замечание в конце п. 3 показывает, что тогда они должны будут иметь общую точку, и мы придем к противоречию. Следовательно, все сводится к тому, чтобы доказать возможность такого изменения множеств F'_i.

Рассмотрим в n-мерном пространстве гиперсферу S с центром в Q' столь малого радиуса, чтобы она имела общие точки с τ, и пусть $\sigma = S\tau$. Тогда можно указать такое $h > 0$, что всякое множество на S с диаметром, меньшим h, не имеет общих точек по крайней мере с одним из множеств F'_i. В самом деле, для любой точки p сферы S можно указать такое h_p (максимальное), что всякое множество диаметра, меньшего h_p, содержащее точку p, не содержит точек по крайней мере одного из множеств F'_i.

Если бы множество значений h_p, когда p описывает сферу S, имело нижней гранью нуль, то можно было бы указать на сфере такую последовательность точек p, для которой последовательность $\{h_p\}$ сходилась бы к нулю. Тогда для предельной точки π (на S) последовательности точек p число h_π было бы равно нулю, что невозможно.

---

[1]) В данном случае это означает: в сколь угодно малом гипершаре с центром в Q'.

На основании п. 5 на S можно указать такую конечную систему замкнутых множеств, покрывающих S и имеющих сколь угодно малые диаметры, что любая точка S принадлежит не более чем n множествам этой системы. Обозначим такие множества с диаметрами, меньшими $\frac{h}{2}$, через Φ_j. Изменим теперь систему покрытия сферы S множествами Φ_j, присоединяя их следующим образом к множествам F'_i: всякое Φ_j, содержащее хотя бы одну точку множества σ, присоединим к множеству F'_i наименьшего индекса среди всех множеств F'_i, имеющих с Φ_j общие точки; Φ_j, не имеющие общих точек с σ, будут отнесены к F'_1. Таким образом, получим $n+1$ множеств Φ'_i $(i=1, 2, \ldots, n+1)$, заменяющих Φ_j. Докажем, что никакая точка сферы S не содержится более чем в n множествах Φ'_i. Для точек, лежащих вне σ, это очевидно; значит, пусть точка p_0 принадлежит σ. Объединение множеств Φ_j, содержащих p_0, имеет диаметр, меньший h, так как диаметр каждого из них меньше $\frac{h}{2}$. Следовательно, все эти Φ_j содержат точки, принадлежащие не более чем n множествам F'_i, а потому не более чем n множествам Φ'_i, и, значит, p_0 принадлежит не более чем n множествам Φ'_i.

Будем теперь изменять F'_i внутри гиперсферы[1]), заметив, что ее радиус может быть взят сколь угодно малым, поэтому изменение будет происходить лишь в малой окрестности точки Q'. Пусть P — точка внутри гиперсферы и вне τ. Такая точка должна существовать в любой n-мерной сфере с центром в Q', поскольку Q' — граничная точка множества τ. Будем заменять множества Φ'_i новыми множествами по следующему принципу: на сфере S положим $\Phi''_i = \Phi'_i$; что же касается внутренности сферы S, то если p — любая точка из Φ''_i сферы S, то всякий отрезок прямой, соединяющий точки p и P, отнесем к Φ''_i. Таким образом,

[1]) Речь идет о шаре, для которого S служит границей в E.

множества Φ_i'' будут иметь лишь одну общую точку — точку P. Обозначим теперь через F_i'' множества $\Phi_i''\tau$. Множества F_i'' замкнуты, покрывают τ и не имеют ни одной общей точки, так как P лежит вне τ, а значит, и вне F_i''. Таким образом, в случае, когда A и B лежат в евклидовых пространствах, теорема доказана[1]).

Пусть теперь множества A и B лежат соответственно в многообразиях M_1 и M_2 одинаковой размерности n. Покажем, что образом внутренней точки $Q \in A$ является внутренняя точка $Q' \in B$, то есть, что существует открытое в M_2 множество, содержащее Q' и полностью лежащее в B.

Пусть V — окрестность точки Q' в M_2, гомеоморфная n-мерному евклидову пространству E_n. Возьмем такую лежащую в A и гомеоморфную E_n окрестность U точки Q, чтобы ее образ при нашем отображении f лежал в V. Если t_1 и t_2 — гомеоморфные отображения на E_n окрестностей U и V соответственно, то отображение $t_2 f t_1^{-1}$ отображает E_n в себя. По доказанному образ $e = t_2 f t_1^{-1}(E_n)$ всего пространства E_n есть открытое в E_n множество. Но тогда и множество $f(U) = t_2^{-1}(e)$, лежащее в B, должно быть в силу непрерывности t_2 открытым в $V = t_2^{-1}(E_n)$. Но V открыто в M_2, следовательно, и $f(U)$ открыто в M_2. Теорема Брауэра доказана.

7. Прямым следствием этой теоремы является следующая теорема, касающаяся проблемы размерности евклидовых пространств:

Между n-мерным евклидовым пространством E_n и m-мерным евклидовым пространством E_m при $m \neq n$ нельзя установить топологическое соответствие; другими словами, размерность есть топологический инвариант.

Достаточно рассмотреть пространство E_m $(m < n)$, погруженное в E_n' и являющееся в таком случае линейным многообразием. Топологическое отображение

---

[1]) Это доказательство принадлежит Лебегу (Fundamenta Mathematicae, т. II, 1921, стр. 271 и т. VI, 1924, стр. 96, где доказательство завершено). См. также Е. Шпернер, цит. соч., стр. 270.

E_n на E_m (оба пространства можно рассматривать как множества, лежащие в n-мерном евклидовом пространстве) должно сохранять внутренние точки, и, следовательно, образом E_n должно быть множество, открытое в E'_n. Но E_m при $m < n$ не может быть этим множеством, и, значит, топологическое отображение пространств E_n и E_m одного на другое неосуществимо.

Эта теорема была доказана Брауэром при помощи введенных им методов, оказавшихся весьма плодотворными в топологии[1]). Можно также вывести эту теорему непосредственно из леммы Лебега[2]): если бы топологическое соответствие между E_m и E_n было осуществимо при $m < n$, то на основании сноски в п. 4 можно было бы разбить E_n на замкнутые множества с диаметрами, меньшими ε, так, чтобы никакая точка E_n не принадлежала более чем $m+1$ множествам разбиения, и это свойство было бы верно для некоторой ограниченной области из E_n и для конечного числа множеств, что противоречит лемме.

Теорема Брауэра будет играть фундаментальную роль в настоящих лекциях.

---

[1]) L. E. J. Brouwer, Mathematische Annalen, т. 70, 1911, стр. 161.

[2]) H. Lebesgue, Mathematische Annalen, т. 70, 1911, стр. 166 и Fundamenta Mathematicae, т. II, 1921, стр. 256. См. также R. Baire, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2-я серия, т. 31, 1907, стр. 97 (для теоремы о размерности).

ГЛАВА II

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ФУНКЦИИ

I. Римановы поверхности как абстрактные пространства

1. Пусть V_0 и V — два топологических пространства и

$$p_0 = f(p) \tag{1}$$

— непрерывное отображение пространства V на V_0.

Если рассматривать множества точек p_0 и p не изолированно, а с учетом связывающего их соотношения (1), то можно определить новое пространство, элементами (точками) которого будут служить пары

$$[p,\ f(p)], \tag{2}$$

которые мы (в случае, если это не вызовет недоразумений) будем обозначать через $(p,\ p_0)$.

Пространством, накрывающим V_0 посредством V в соответствии с отображением (1), будем называть пространство $(V\ )_f^V$, определяемое как множество точек (2), где p пробегает пространство V, а предельные точки определяются следующим образом: точка $a \in (V_0)_f^V$ называется предельной для множества $A \subset (V_0)_f^V$, если образ точки a в V при соответствии $[p,\ f(p)] \longleftrightarrow p$ есть предельная точка образа A в V. Так как это соответствие взаимно однозначное, то наше определение лишь переносит на множество точек (2) понятие предельных точек пространства V.

Ясно, что определенное таким образом пространство гомеоморфно V; следовательно, пространства $(V_0)_f^V$ и V обладают одними и теми же топологическими свойствами, то есть с чисто топологической точки зрения между ними не существует никакого различия. Но $(V_0)_f^V$ не просто топологическое пространство: в самом деле, каждой точке (p, p_0) этого пространства соответствует определенная точка $p_0 \in V_0$, называемая *проекцией* (или следом) точки (p, p_0) на V_0, и наличие такого соответствия отличает $(V_0)_f^V$ от общего топологического пространства. Следовательно, накрывающее пространство — это топологическое пространство с определенным на нем непрерывным отображением.

Подвергнем теперь фигурирующее в соотношении (1) пространство V топологическому отображению

$$p = h(p_1),$$

переводящему его в некоторое пространство V_1. Тогда соотношение (1) примет вид

$$p_0 = f[h(p_1)] \equiv f_1(p_1),$$

и мы получим новое пространство $(V_0)_{f_1}^{V_1}$.

Между пространствами

$$(V_0)_f^V \quad \text{и} \quad (V_0)_{f_1}^{V_1},$$

как накрывающими и тем более топологическими пространствами, не существует никакого различия. Мы будем рассматривать их как два различных представления одного и того же накрывающего пространства.

2. Сформулировав эти общие соображения, возьмем в качестве V_0 и V два топологических двумерных многообразия [1]). Будем говорить в этом случае, что пространство, накрывающее V_0 пространством V при помощи соотношения (1), есть *риманова накрывающая*, если выполняются следующие условия:

I. На многообразии V можно указать конечное или счетное множество замкнутых областей δ_i $(i = 1, 2, \ldots)$,

---

[1]) Тогда $(V_0)_f^V$ будет также двумерным многообразием, так как оно гомеоморфно V.

компактных в V и таких, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = V,$$

причем каждая точка многообразия V является внутренней точкой по крайней мере одной из δ_i.

II. В каждой области δ_i отображение (1) удовлетворяет следующим условиям: существуют два топологических отображения $h^i(p)$ и $h_0^i(p_0)$ областей δ_i и $f(\delta_i)$ [1]), переводящие эти области соответственно на единичные круги

$$|\xi| \leqslant 1 \text{ и } |\zeta| \leqslant 1$$

плоскостей (ξ) и (ζ) комплексных переменных ξ и ζ так, чтобы отображение

$$h_0^i f(h^i)^{-1}\ ^{2)}$$

круга $|\xi| \leqslant 1$ на круг $|\zeta| \leqslant 1$ имело вид

$$\zeta = \xi^{n_i},$$

где n_i — целое положительное число, зависящее от δ_i.

Ясно, что если существует одна система областей δ_i, то таких систем найдется бесконечно много.

Множество точек

$$[p, f(p)],$$

где p — любая точка из δ_i, образует замкнутую компактную область D_i пространства $(V_0)_f^V$, а n_i есть число листов области D_i. Если $n_i > 1$, то точка $\alpha_i \in \delta_i$, переводимая отображением h^i в точку $\xi = 0$, уже не будет произвольной точкой области δ_i. Точка

$$[\alpha_i, f(\alpha_i)],$$

соответствующая ей в D_i, называется *точкой ветвления* накрывающего многообразия, а число $n_i - 1$ есть *по-*

---

[1]) $f(\delta_i)$, как образ δ_i в V_0, является множеством пространства V_0, а отнюдь не пространства $(V_0)_f^V$.

[2]) $(h^i)^{-1}$ означает отображение, обратное h^i; оно переводит круг $|\xi| \leq 1$ на δ_i.

рядок ветвления этой точки[1]). В каждой области D_i имеется не более одной точки ветвления, и эти точки не зависят от системы областей δ_i: в самом деле, они полностью характеризуются тем свойством, что ни в какой окрестности точки α_i на многообразии V отображение (1) не будет взаимно однозначным на основании условия II. Более того, эти точки не зависят от различных способов представления накрывающего многообразия; каково бы ни было топологическое отображение, осуществленное над V, проекции и порядок точек ветвления остаются неизменными.

3. Если имеется замкнутое многообразие V и бесконечное множество покрывающих его (в смысле сформулированного выше условия I) областей δ_i, то можно выбрать *конечное число областей* δ_i, покрывающих V.

Действительно, пусть в последовательности

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

δ_k будет первой областью, содержащей внутренние точки, не являющиеся внутренними для области δ_1, и пусть p_k — одна из таких точек. Пусть затем δ_{k_1} — первая из последовательности $\{\delta_i\}$ область $\delta_i (i > k)$, содержащая внутренние точки, не являющиеся внутренними ни для δ_1, ни для δ_k, и пусть p_{k_1} — одна из таких точек. Продолжая этот процесс, получим последовательность

$$\delta_1, \delta_k, \delta_{k_1}, \ldots, \delta_{k_n}, \ldots \tag{3}$$

и соответствующую ей последовательность различных точек

$$p_k, p_{k_1}, \ldots, p_{k_n}, \ldots, \tag{4}$$

где p_{k_n} — внутренняя точка области δ_{k_n}, не являющаяся внутренней ни для одной из областей

$$\delta_1, \delta_k, \ldots, \delta_{k_{n-1}}.$$

Если последовательность (3) конечна, то теорема доказана, так как в определенный момент среди δ_i не найдется области, содержащей точки, не являющиеся

[1]) Точки, не являющиеся точками ветвления, называются обыкновенными.

внутренними ни для одной из предыдущих областей последовательности (3), а это и означает, что V покрыто конечным числом областей.

Докажем теперь, что если многообразие V замкнуто, то последовательность (3) не может быть бесконечной. Действительно, если бы (3) была бесконечна, то и последовательность (4) имела бы бесконечное число членов, а поскольку все они различны и V замкнуто, то последовательность (4) имела бы предельную точку. Эта точка должна была бы находиться внутри одной из δ_i, пусть δ_h. Но как только $k_n > h$, все точки p_{k_n} будут находиться вне δ_h, то есть в δ_h найдется лишь конечное число точек из последовательности (4), что противоречит нашему предположению, и теорема доказана.

Обратно, если многообразие V может быть покрыто конечным числом областей δ_i, то оно замкнуто; это следует из компактности δ_i и из того, что объединение конечного числа компактных множеств компактно.

Из прямой и обратной теорем следует, что *замкнутые римановы накрывающие многообразия характеризуются тем, что для них можно указать конечную систему областей* $\{\delta_i\}$, *удовлетворяющую условиям* I *и* II.

Замечание. Не предполагая V замкнутым, рассмотрим замкнутое компактное в V множество $F \subset V$. Предыдущие рассуждения применимы здесь почти без изменений [1]), и мы получаем следующую теорему: *всякое замкнутое компактное в V множество может быть покрыто конечным числом областей, выбранных среди* δ_i [2]).

4. Риманова поверхность. Конкретизируем теперь пространство V_0: возьмем в качестве V любое двумерное многообразие, а в качестве V_0 — плоскость (z) комплексного переменного z или, что то же самое, сферу Римана [3]). Если существует риманова накрывающая

---

[1]) Нужно только брать p_{k_n} из F.

[2]) Если δ_i покрывают V, то достаточно, чтобы F было компактным; если же δ_i покрывают лишь F, то необходимо, чтобы F было компактным и замкнутым в V.

[3]) Плоскость (z) — или комплексная плоскость — содержит точку ∞ и этим отличается от евклидовой плоскости (двумерного евклидова пространства). Комплексная плоскость есть замкнутое многообразие, так как она гомеоморфна сфере.

плоскости (z) пространством V, то соответствующее накрывающее многообразие называется *римановой поверхностью*, а многообразие V является топологической моделью этой поверхности.

Римановы поверхности будут играть в дальнейшем главную роль. В следующей главе мы покажем, что V не может быть произвольным многообразием, если мы хотим, чтобы оно могло накрывать плоскость с соблюдением условий I и II. Следовательно, класс многообразий, гомеоморфных римановым поверхностям, будет менее общим, чем класс топологических двумерных многообразий. Но все же, как мы покажем несколько позже, для любой аналитической функции можно указать многообразие V и риманову поверхность, для которой V будет служить топологической моделью. Прежде чем приступить к рассмотрению этого основного вопроса, мы укажем на некоторые упрощения, которые можно внести в систему $\{\delta_i\}$ для случая римановых поверхностей.

5. Пусть R — произвольная риманова поверхность. На топологической модели V этой поверхности возьмем точку p_0 и ее окрестность $U_{p_0} \subset V$ и покажем, что *существует компактная замкнутая область $d \subset U_{p_0}$, содержащая внутри точку p_0, удовлетворяющая условию* II *для R и такая, что $f(d)$ есть круг с центром в точке* $z_0 = f(p_0)$. Если $z_0 = \infty$, то под кругом с центром в точке z_0, как обычно, понимается множество точек $|z_0| \geqslant \rho$, где $\rho > 0$.

Замкнутая область Γ поверхности R, соответствующая d, называется *простым* или *кратным* кругом поверхности R в зависимости от того, будет ли $n = 1$ или $n > 1$. Точка области Γ, проектируемая в z_0 (единственная в Γ), называется *центром* Γ.

Заметим предварительно, что условие II совместно с теоремой Брауэра показывает, что если $G \subset V$ открыто, то $f(G)$ также открыто; следовательно, множество $f(U_{p_0})$ открыто в (z).

Заменим теперь U_{p_0} другой окрестностью точки p_0, заключенной в U_{p_0} и удовлетворяющей следующим условиям: 1) эта новая окрестность точки p_0 целиком содержится в одной из областей δ_i (обозначим ее

через δ), 2) она не содержит, кроме, быть может, точки p_0, никакой точки $\alpha_i \in V$, переходящей в точку ветвления поверхности R. Условия I и II показывают, что такая окрестность существует; назовем ее снова окрестностью U_{p_0}, ибо вполне достаточно доказать теорему для этой видоизмененной окрестности.

Так как $f(U_{p_0})$ открыто, то на плоскости (z) можно описать круг γ с центром в точке z_0, лежащий целиком в $f(U_{p_0})$. Пусть A — множество точек из U_{p_0}, определяемых равенством

$$\gamma = f(A).$$

Если точка (p_0, z_0) из R не является точкой ветвления, то условие II, примененное к δ, и теорема Брауэра показывают, что A — замкнутая компактная область d, удовлетворяющая равенству

$$\gamma = f(d),$$

поскольку в d отображение

$$z = f(p) \tag{5}$$

будет топологическим. Точка p_0 лежит внутри области d, так как z_0 лежит внутри круга γ. Следовательно, эта область удовлетворяет всем поставленным условиям.

Если теперь (p_0, z_0) — точка ветвления и n — число листов области D[1]), то, по предположению, существуют такие два топологических отображения $h_0(z)$ и $h(p)$ множеств $f(\delta)$ и δ соответственно на круги $|\zeta| \leqslant 1$ и $|\xi| \leqslant 1$, что отображение $h_0 f h^{-1}$ круга $|\xi| \leqslant 1$ на круг $|\zeta| \leqslant 1$ записывается в виде

$$\zeta = \xi^n. \tag{6}$$

Это отображение преобразует $h(A)$ в $h_0(\gamma)$, а так как $h_0(\gamma)$ — замкнутая компактная область, содержащая внутри начало координат плоскости (ζ), то (6) показывает, что $h(A)$ тоже замкнутая компактная область плоскости (ξ). Тогда согласно теореме Брауэра A есть замкнутая компактная область многообра-

---

[1]) D (так же, как выше D_i) означает область римановой поверхности, соответствующую δ.

зия V; обозначим ее через d, ибо она, как и выше, содержит точку p_0. Покажем, что эта область удовлетворяет еще и условию II, и тем самым докажем, что d, как и в предыдущем случае, удовлетворяет условиям теоремы.

Рассмотрим преобразование плоскости (ξ') в плоскость (z):

$$z = z_0 + \rho\xi'^n \quad (\text{где } \rho \text{ — радиус } \gamma). \tag{7}$$

Оно отображает круг $|\xi'| \leqslant 1$ на γ, и если мы сопоставим (7) с (5), то, принимая во внимание (6), видим, что исключение z из этих двух соотношений дает нам топологическое отображение h' области d на круг $|\xi'| \leqslant 1$. Следовательно, отображение (7) эквивалентно

$$f(h')^{-1}.$$

Если мы теперь обозначим через h_0 отображение

$$\rho\zeta' = z - z_0,$$

то получим, что отображение

$$h_0 f(h')^{-1}$$

можно записать в виде

$$\zeta' = \xi'^n.$$

Отсюда следует, что d удовлетворяет условию II[1]).

6. Прямым следствием доказанной теоремы является тот факт, что любую риманову поверхность можно покрыть не более чем счетным множеством простых и кратных кругов этой поверхности. В самом деле, так как каждая область δ_i гомеоморфна кругу на плоскости, то известная лемма Бореля — Лебега показывает, что δ_i может быть покрыта конечным числом кругов из R. Если поверхность R замкнута, то из теоремы п. 3 следует, что R может быть покрыта конечным числом простых и кратных кругов.

---

[1]) Если $z_0 = \infty$, то нужно сделать замену переменного $z = \dfrac{1}{z'}$.

Следовательно, в случае римановой поверхности мы можем ограничиться рассмотрением областей δ_i, соответствующих кругам поверхности R. Более того, мы покажем, что можно выбрать семейство таких кругов, каждый из которых будет иметь общие точки лишь с конечным числом кругов этого семейства.

Для этого разобьем R на замкнутые множества F_i следующим способом: положим сначала

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = \delta_1, \\ &\Delta_2 = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k, \\ &\Delta_3 = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k + \ldots + \delta_{k_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

где δ_k — первая область из последовательности

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

такая, что

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k$$

покрывает Δ_1 [1]); δ_{k_1} — первая область с индексом, большим k, из последовательности $\{\delta_k\}$ такая, что

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k + \ldots + \delta_{k_1}$$

покрывает Δ_2, и так далее. Каждая область Δ_i является объединением конечного числа компактных замкнутых областей.

Таким образом, каждая из областей Δ_i состоит из внутренних точек и границы и

$$\sum_i \Delta_i = R.$$

Положим теперь (обозначая через $\bar{A}$ замыкание A)

$$F_i = \overline{(\Delta_i - \Delta_{i-1})},$$

если $i > 1$ и $F_1 = \Delta_1$.

---

[1]) Напомним, что множество покрыто областями δ_i, если каждая точка этого множества лежит внутри по крайней мере одной из δ_i.

Множества F_i будут замкнутыми и компактными в R и, кроме того,

$$\sum_i F_i = R.$$

Для любого i в силу определения множеств F_i

$$F_i F_{i+m} = 0 \qquad (m \geqslant 2). \tag{8}$$

Покроем множество F_i конечным числом кругов поверхности R (так же, как и для δ_i, это всегда возможно), и пусть C_i — множество этих кругов. На основании (8) и доказанной выше теоремы круги, составляющие C_i, можно выбрать таким образом, чтобы для любого i имели место равенства

$$C_i C_{i-2} = 0, \qquad C_i F_{i+2} = 0. \tag{9}$$

Для этого возьмем последовательно $i = 1, 2, \ldots$ Для $i = 1$ и $i = 2$ выполняется только второе условие, первое же не имеет смысла. Для $i > 2$ выберем C_i, удовлетворяющее обоим условиям (9), что возможно на основании соотношения (8).

Множество кругов всех систем C_i покрывает R, и каждый из кругов имеет общие точки не более чем с конечным числом кругов.

7. Аналитическая функция на римановой поверхности. Если каждой точке $(p, z) \in R$ поставить в соответствие вполне определенное комплексное число (конечное или бесконечное), то тем самым будет определена комплексная функция на R. Изображая комплексные числа на сфере Римана, легко определить непрерывность этой функции даже в тех точках R, где ее значение равно ∞. Рассмотрим теперь функцию

$$u = \varphi(p)^{1)},$$

непрерывную на R (а следовательно, и на всем V).

---

[1]) Так как каждой точке p соответствует только одна точка поверхности R, то данную функцию можно записывать как функцию точки p на V.

Будем называть эту функцию аналитической на R, если для любой точки $(p_0, z_0) \in R$ существует круг $\Gamma \subset R$ с центром в этой точке, в котором функция u представляется сходящимся рядом

$$u = \sum_{i=\mu}^{i=+\infty} a_i (z - z_0)^{i/\nu} \text{ [1]},$$

где z означает проекцию точки (p, z), a_i — конечные комплексные постоянные, μ — некоторое целое число и ν — число листов области Γ.

Преобразование переменного, сводящее всякий кратный круг к простому, и элементарные свойства аналитических функций в плоской области показывают, что, не сужая класса аналитических на R функций, можно потребовать представимости их в виде указанного ряда лишь для случая $\nu = 1$.

Заметим, что понятие аналитической функции, которое мы определяем для произвольной римановой поверхности, не имеет смысла для топологического многообразия, где можно говорить лишь о непрерывной функции. Герман Вейль впервые показал, как классическое понятие римановой поверхности, остававшееся в течение длительного времени интуитивным, можно строго определить, исходя из абстрактного многообразия. Он заметил, что такое многообразие становится римановой поверхностью лишь после определения понятия функции, аналитической на этом многообразии [2]. Такое определение всегда дается путем введения (прямо или косвенно) угловой метрики. Определение, данное в настоящей работе, сводится к перенесению на R метрики плоскости (z), накрываемой R.

Теперь мы приступим к фактическому построению римановых поверхностей, исходя из разложений Тейлора.

---

[1]) В случае $z_0 = \infty$ этот ряд должен быть надлежащим образом изменен.

[2]) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Лейпциг и Берлин, 1913, стр. 35 и 36. Вейль предполагает V триангулируемым, но Т. Радо показал, что от этого предположения при определении R можно освободиться (Acta Szeged, т. II, 1925, стр. 101).

II. Риманова поверхность аналитической функции

1. Любой аналитической функции комплексного переменного Z можно поставить в соответствие риманову поверхность (в смысле предыдущего определения), на которой функция будет удовлетворять сформулированным выше условиям аналитичности.

Известно, что аналитическая функция от Z полностью определяется одним из своих вейерштрассовских элементов, так как все элементы функции получаются из него путем аналитического продолжения.

Достаточно обобщить понятие элемента на разложения следующего вида:

$$\sum_{i=\mu}^{i=+\infty} a_i (Z - z)^{i/\nu} \tag{1}$$

(где μ — некоторое целое число, а ν — целое $\geqslant 1$), чтобы расширить продолжение и определение функции на алгебраические элементы[1]). Точка z плоскости (z) называется *центром* элемента[2]).

Обозначим через V множество всех элементов (1) заданной аналитической функции. Превратим V в двумерное топологическое многообразие, а затем определим накрывающую плоскости (z) при помощи V, которая и будет *римановой поверхностью данной функции.*

Итак, точки p топологического пространства V, которое мы определяем, будут элементами (1) одной и той же аналитической функции от Z. Будем говорить, что точка $p' \in V$ *принадлежит кругу сходимости* ряда элемента p, если центр z' элемента p' лежит внутри этого круга и ряды элементов p и p' имеют одинаковую сумму в общей части своих кругов сходимости. Таким образом, это определение будет исчерпывающим для того случая, когда p и p' — вейерштрассовские элементы. В противном же случае мы уточним его следующим

---

[1]) $\mu < 0$ и $\nu = 1$ соответствуют полюсам, $\nu > 1$ — критическим алгебраическим элементам.

[2]) Если центр есть ∞, то ряд (1) нужно надлежащим образом изменить.

образом: p' мы будем брать только среди вейерштрассовских элементов функции, то есть только для таких элементов мы будем говорить об их принадлежности кругу сходимости элемента p; что же касается самого p, то он может быть любым; условимся, что если p — критический элемент ($\nu > 1$), то равенство сумм двух рядов требуется лишь для *одного* значения суммы ряда элемента p в каждой точке общей части кругов сходимости.

Предельной точкой множества $A \subset V$ назовем всякую точку $p \in V$ такую, что для любого $\rho > 0$, меньшего или равного радиусу сходимости элемента p, найдется точка $p' \in A$, отличная от p, принадлежащая кругу сходимости элемента p и такая, что расстояние между центрами z и z' меньше ρ.

Легко проверить, что это определение удовлетворяет аксиомам топологического пространства и, значит, V становится топологическим пространством. Но определенное таким образом пространство V является также и топологическим двумерным многообразием. В самом деле, рассмотрим множество G всех точек p', которые в смысле сформулированного выше определения принадлежат кругу сходимости точки $p \in V$. Множество G открыто в V. Кроме того, если p есть вейерштрассовский элемент, то между точками $p' \in G$ и внутренними точками круга сходимости p существует взаимно однозначное соответствие, а именно: каждый элемент p' соответствует своему центру, и это соответствие к тому же взаимно непрерывно. Но внутренность круга, очевидно, гомеоморфна евклидовой плоскости [1]); следовательно, условие того, чтобы V было двумерным многообразием, удовлетворяется для p. Если же p — алгебраический элемент, то преобразование

$$Z - z = \zeta^{\nu},$$

[1]) Достаточно поставить в соответствие точки единичного круга и евклидовой плоскости, имеющие одинаковый аргумент и модули ρ и r, связанные соотношением

$$r = \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2}.$$

дополненное в случае, если сумма ряда элемента p бесконечна в точке z, инверсией

$$\zeta = \frac{1}{\zeta'},$$

приводит к предыдущему случаю и показывает, что G снова гомеоморфно евклидовой плоскости. Следовательно, V есть двумерное многообразие[1]).

2. Определим теперь накрывающую плоскости (z) при помощи V следующим образом: всякой точке $p \subset V$ соответствует на (z) центр z элемента p. Пусть R — полученное таким способом накрывающее многообразие. Покажем, что R — риманова поверхность. Это утверждение будет получено в виде следствия из следующей теоремы Пуанкаре и Вольтерра:

Для любой наперед заданной аналитической функции можно выбрать конечное или счетное множество таких элементов, что всякий отличный от них элемент этой функции принадлежит кругу сходимости хотя бы одного из выбранных элементов.

Рассмотрим вейерштрассовский элемент p_0 с центром z_0 и все пути продолжения, образованные ломаными с конечным числом сторон, выходящими из z_0 и имеющими вершины (так же как и концы) в точках с рациональными координатами. Среди этих путей найдутся такие, по которым аналитическое продолжение элемента p_0 может быть доведено до конца z_r и получен вейерштрассовский элемент p_r с центром z_r. Ломаные линии, удовлетворяющие этим условиям, обозначим через π; так как множество этих линий не более чем счетно, то и множество элементов p_r, полученное таким способом, не более чем счетно. Прежде всего, ясно, что всякий вейерштрассовский элемент принадлежит кругу сходимости одного из p_r. В самом деле, если p — любой вейерштрассовский элемент с центром z, то всегда можно путем продолжения из p_0 вдоль одной из линий π прийти к p_r, принадлежащему кругу сходимости

[1]) Связность V вытекает из определения полной аналитической функции. Выполнение же для V аксиомы отделимости Хаусдорфа непосредственно проверяется с учетом теоремы единственности для аналитических функций. *(Прим. ред.)*

элемента p и лежащему как угодно близко[1]) к p. Но так как p есть вейерштрассовский элемент, то он сам принадлежит кругу сходимости любого достаточно близкого к p элемента p_r. Остается, следовательно, показать, что множество алгебраических элементов не более чем счетно и что, таким образом, их можно рассматривать как выбранные. Итак, пусть p — алгебраический элемент. Существует элемент p_{r_0}, принадлежащий кругу сходимости элемента p и такой, что лишь один алгебраический элемент p находится на окружности круга сходимости элемента p_{r_0}. Действительно, достаточно выбрать p_{r_0} среди элементов, принадлежащих кругу сходимости p, так, чтобы z_{r_0} лежал достаточно близко к центру z элемента p. Элемент p ставим в соответствие выбранному элементу p_{r_0}. Таким образом, всякому p_r соответствует *не более* одного алгебраического элемента, в то время как всякий алгебраический элемент соответствует бесконечному множеству p_r. А поскольку таковых счетное множество, то и множество алгебраических элементов не более чем счетно, и теорема доказана.

Для того чтобы применить эту теорему к нашему накрывающему многообразию, заметим, что в приведенных выше рассуждениях круг сходимости элемента p_r можно заменить *концентрическим* кругом меньшего радиуса. Всякий вейерштрассовский элемент будет снова принадлежать одному из этих уменьшенных кругов. Заменим точно так же круги сходимости алгебраических элементов концентрическими кругами. Множество элементов, принадлежащих кругу сходимости некоторого элемента p_r, но имеющих центры внутри или на окружности уменьшенного концентрического круга, образует область, замкнутую и компактную в V. Точно так же найдутся аналогичные множества, соответствующие алгебраическим элементам. Эти замкнутые области покрывают все V, и, таким образом, условие I римановой накрывающей выполнено.

---

[1]) Мерой близости элементов p_r и p, один из которых принадлежит кругу сходимости другого, является расстояние между центрами кругов сходимости этих элементов. *(Прим. ред.)*

Что же касается условия II, то рассуждения, аналогичные проведенным на стр. 57, показывают, что оно тоже выполняется.

Итак, доказано, что R — риманова поверхность, покрывающие ее области являются простыми и кратными кругами поверхности R; многообразие V есть ее топологическая модель. Таким образом, всякой аналитической функции соответствует риманова поверхность, на которой функция будет аналитической в смысле определения, данного в конце предыдущего раздела. Всякий вейерштрассовский или алгебраический элемент функции соответствует точке римановой поверхности, и обратно. Алгебраические элементы функции всегда соответствуют точкам ветвления римановой поверхности.

Заканчивая раздел, заметим, что замкнутые римановы поверхности соответствуют алгебраическим функциям: в самом деле, это единственные аналитические функции, которые не имеют трансцендентных особых точек и потому приводят к компактным многообразиям, то есть к замкнутым многообразиям V.

III. Аналитическая функция, соответствующая римановой поверхности, заданной a priori

Теперь мы приступим к рассмотрению обратного вопроса и покажем, что всякой заданной a priori римановой поверхности можно поставить в соответствие аналитическую функцию; иными словами, можно построить аналитическую функцию, риманова поверхность которой, полученная при помощи метода, указанного в предыдущем разделе, совпадает с R.

1. Определения и предварительные теоремы. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в открытой области Ω плоскости двух действительных переменных (x, y) вместе со своими производными первого порядка, то положим

$$D_\Omega(f) = \lim_{m\to\infty} \iint\limits_{\overline{\Omega}_m} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

где $\{\overline{\Omega}_m\}$ означает бесконечную последовательность

таких замкнутых ограниченных областей, что

$$\overline{\Omega}_m \subset \overline{\Omega}_{m+1}$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \overline{\Omega}_m = \Omega.$$

Этот предел не зависит от выбора последовательности областей $\{\Omega_m\}$, так как подынтегральная функция всегда положительна; по той же причине этот предел, конечный или бесконечный, всегда существует. Его называют интегралом Дирихле. В тех случаях, когда это не может вызвать путаницы, мы будем опускать индекс Ω в обозначении $D_\Omega(f)$.

Заметим сразу же, что если $D_\Omega(f_1)$ и $D_\Omega(f_2)$ конечны, то конечен и интеграл

$$D_\Omega(f_1 + f_2).$$

В самом деле, пусть λ и μ — любые действительные числа. Интеграл

$$D_{\overline{\Omega}_m}(\lambda f_1 + \mu f_2)$$

всегда конечен и $\geqslant 0$. Следовательно, раскрывая подынтегральное выражение, получаем

$$\lambda^2 D_{\overline{\Omega}_m}(f_1) + 2\lambda\mu D_{\overline{\Omega}_m}(f_1, f_2) + \mu^2 D_{\overline{\Omega}_m}(f_2) \geqslant 0, \tag{1}$$

где

$$D_{\overline{\Omega}_m}(f_1, f_2) = \int\int_{\overline{\Omega}_m} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Так как квадратичная форма (1) должна быть положительной при любых λ и μ, то

$$[D_{\overline{\Omega}_m}(f_1, f_2)]^2 \leqslant D_{\overline{\Omega}_m}(f_1) D_{\overline{\Omega}_m}(f_2),$$

что и доказывает ограниченность левой части при $m \to \infty$. Значит, то же самое можно сказать и об интеграле

$$D_{\overline{\Omega}_m}(f_1 + f_2),$$

который мы получим, положив в (1) $\lambda = \mu = 1$. Так как это выражение всегда имеет определенный предел при $m \to \infty$, то интеграл

$$D_\Omega(f_1 + f_2)$$

конечен.

Предположим теперь, что Ω — не область плоскости (x, y), а открытая область римановой поверхности R[1]), и пусть $\varphi(p)$ — функция, определенная на R.

Будем говорить, что φ принадлежит семейству (A) на Ω, если φ непрерывна всюду на Ω и, кроме того, выполняется следующее условие:

Для любой обыкновенной точки $(p, z) \in \Omega$ существует круг γ_p из Ω с центром в этой точке такой, что если положить $z = x + iy$ в (z) и

$$\varphi(p) = f(x, y)$$

в γ_p, то функция $f(x, y)$ будет обладать непрерывными первыми производными во всех точках круга γ_p, за исключением не более чем конечного числа лежащих в этом круге аналитических особых дуг, на которых производные могут не существовать[2]).

Произведем триангуляцию области Ω так, чтобы каждый треугольник лежал внутри по крайней мере одного из γ_p и чтобы каждый треугольник был разделен особыми дугами не более чем на конечное число областей δ_i[3]). Во всякой δ_i, так же как в плоской области, можно определить интеграл Дирихле, переходя к пределу в интеграле, взятом по последовательности областей, внутренних к δ_i. Затем по определению полагаем

$$D_\Omega(\varphi) = \sum_i D_{\delta_i}(\varphi).$$

---

[1]) Такая область в свою очередь является римановой поверхностью.

[2]) Некоторые из этих дуг могут вырождаться в точки. Мы будем рассматривать точки ветвления поверхности R как точки таких дуг, лежащих на окружности некоторого γ_p.

[3]) Такую триангуляцию можно совершить, определив систему γ_p так, как это было сделано в п. 6, использовав границы этих γ_p.

Так как все члены ряда в правой части положительны, то интеграл $D_{\Omega}(\varphi)$ либо имеет конечное значение, либо обращается в бесконечность.

Легко видеть, что свойства, относящиеся к интегралу Дирихле от суммы, имеют место и в общем случае, когда функции принадлежат семейству (A) и плоская область заменяется областью на римановой поверхности.

2. Возьмем теперь такую плоскую замкнутую ограниченную область $\overline{\Omega}$, чтобы ее граница C была образована конечным числом простых аналитических кривых. Рассмотрим две непрерывные функции f и ψ действительных переменных (x, y), которые имеют на $\overline{\Omega}$ непрерывные производные первого порядка, а ψ имеет, кроме того, непрерывные производные второго порядка. Тогда получим хорошо известную *формулу Грина*:

$$D_{\overline{\Omega}}(f, \psi) + \iint\limits_{\overline{\Omega}} f \Delta\psi \, dx \, dy + \int\limits_{C} f \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = 0, \qquad (2)$$

где $\Delta\psi$ — оператор Лапласа, а $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ означает производную по нормали, внутренней к $\overline{\Omega}$.

Эта формула остается справедливой и в том случае, когда f лишь непрерывна на $\overline{\Omega}$ и принадлежит семейству (A) в области Ω, внутренней к $\overline{\Omega}$. В самом деле, можно, как и выше, применить соотношение (2) к замкнутым областям, внутренним к тем, которые определяют на Ω особые дуги и стремятся к ним, а затем взять сумму соотношений (2), полученных в случае надобности приближением области $\overline{\Omega}$ надлежащими внутренними замкнутыми областями.

3. Из этого факта можно извлечь важное следствие, которое понадобится нам в дальнейшем.

Рассмотрим круг (простой или кратный) Γ на поверхности R и все функции $\varphi(p)$ семейства (A) внутри Γ, непрерывные на всем Γ и принимающие одинаковые непрерывные значения на его границе.

Функцию φ будем называть *гармонической* в Γ, если соответствующая ей функция $f(x, y)$ будет гармониче-

ской функцией от (x, y) в окрестности каждой точки поверхности R, не являющейся точкой ветвления. Докажем, что

Среди всех функций $\varphi(p)$, принимающих на границе круга Γ одинаковые значения, гармоническая функция доставляет интегралу

$$D_\Gamma(\varphi)$$

наименьшее значение[1]).

Заметив, что конформное отображение не изменяет значения интеграла Дирихле и преобразует гармоническую функцию в гармоническую, мы видим, что достаточно доказать теорему для простых кругов, к которым всегда можно свести (при помощи неоднократно упоминавшегося конформного отображения) кратные круги.

Рассмотрим, следовательно, в плоскости (x, y) круг Γ с центром в начале координат и радиусом 1. Пусть $u(r, \theta)$ — гармоническая функция (которая, как известно, единственна среди рассматриваемых здесь функций φ), r и θ — полярные координаты точки (x, y).

Положим

$$u_m(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_m(1, \theta)\cos k\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\theta)\cos k\theta\, d\theta, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_m(1, \theta)\sin k\theta\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\theta)\sin k\theta\, d\theta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и непрерывная функция $\mu(\theta)$ представляет заданные значения всех функций φ в точках с аргументом θ, лежащих на окружности Γ.

Пусть $\nu(r, \theta)$ — другая функция из семейства (A), определенная в Γ и принимающая на его окружности

---

[1]) Как показал Адамар, существуют случаи, когда $D_\Gamma(\varphi)$ обращается в бесконечность для любой функции φ, принимающей на границе заданные значения.

значения $\mu(\theta)$. Предположим, что интеграл $D_\Gamma(\nu)$ конечен[1]; покажем, что тогда

$$D_\Gamma(u) \leqslant D_\Gamma(\nu). \tag{5}$$

Для этого применим формулу (2) к кругу Γ, полагая $\psi = u_m(r, \theta)$ и $f = \nu - u_m$. Первая из этих функций, будучи многочленом от r, удовлетворяет, очевидно, условиям непрерывности и дифференцируемости, налагаемым на функцию ψ; что же касается функции $\nu - u_m$, то она непрерывна на Γ и принадлежит семейству (A) в Γ. Получаем

$$D_\Gamma(\nu - u_m, u_m) + \iint_\Gamma (\nu - u_m)\,\Delta u_m\,dx\,dy + \int_0^{2\pi} (\nu - u_m)\left(\frac{\partial u_m}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta = 0.$$

Но $\Delta u_m = 0$, так как u_m — гармоническая функция. Для того чтобы оценить последний интеграл, продифференцируем (3) и подставим в интеграл; тогда получим для этого интеграла выражение

$$\sum_{k=1}^{m} \int_0^{2\pi} k\,[\nu(1, \theta) - u_m(1, \theta)]\,[a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta]\,d\theta.$$

Так как по предположению $\nu(1, \theta) = \mu(\theta)$, то отсюда в силу (4) следует, что это выражение равно нулю.

Следовательно,

$$D_\Gamma(\nu - u_m, u_m) = 0,$$

и, значит,

$$D_\Gamma(\nu) = D_\Gamma[(\nu - u_m) + u_m] = D_\Gamma(\nu - u_m) + D_\Gamma(u_m),$$

что и дает

$$D_\Gamma(u_m) \leqslant D_\Gamma(\nu).$$

---

[1]) Если никакая функция не доставляет интегралу Дирихле конечного значения, то получим случай Адамара (см. предыдущую сноску).

Если Γ' — круг с центром в начале координат и радиуса <1, то *тем более*

$$D_{\Gamma'}(u_m) \leqslant D_{\Gamma}(\nu). \tag{6}$$

Но известно, что $u_m(r, \theta)$ равномерно сходятся к $u(r, \theta)$ в Γ' и что то же самое имеет место и для их производных; следовательно,

$$\lim_{m \to \infty} D_{\Gamma'}(u_m) = D_{\Gamma'}(u),$$

и, используя (6), получаем, что $D_{\Gamma'}(u) \leqslant D_{\Gamma}(\nu)$.

Устремим теперь радиус круга Γ' к 1; получим

$$\lim_{\Gamma' \to \Gamma} D_{\Gamma'}(u) = D_{\Gamma}(u) \leqslant D_{\Gamma}(\nu),$$

что и требовалось доказать.

Еще легче показать, что $u(r, \theta)$ — единственная среди всех рассматриваемых функций, для которой интеграл Дирихле принимает свое наименьшее значение. В самом деле, если бы ν была функцией, отличной от u и такой, что $D_{\Gamma}(\nu)$ был бы минимальным, то, так как интеграл

$$D_{\Gamma}[u + \lambda(\nu - u)] = D_{\Gamma}(u) + 2\lambda D_{\Gamma}(u,\ \nu - u) + \lambda^2 D_{\Gamma}(\nu - u) \tag{7}$$

не может быть меньше $D_{\Gamma}(u)$ [1]), сумма

$$2\lambda D_{\Gamma}(u,\ \nu - u) + \lambda^2 D_{\Gamma}(\nu - u)$$

должна быть неотрицательной для любого λ, и, следовательно,

$$D_{\Gamma}(u, \nu - u) = 0.$$

Поэтому для $\lambda = 1$ соотношение (7) должно иметь вид

$$D_{\Gamma}(\nu - u) = 0,$$

откуда

$$u \equiv \nu,$$

---

[1]) Действительно, функция $u + \lambda(\nu - u)$ принадлежит к уже рассмотренным, так как по предположению $\nu = u$ на границе Γ. Соотношение (7), верное для Γ', остается верным и для Γ в силу возможности перехода к пределу.

так как на окружности эти функции имеют одинаковые значения.

Это показывает, что гармоническая функция характеризуется тем, что доставляет интегралу $D_\Gamma(u)$ минимальное значение. Однако для наших приложений будет достаточно полученного выше неравенства.

4. Оценка $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ при помощи $D_\Gamma(u)$, когда u — гармоническая функция и Γ — некоторый круг на плоскости. Существует такая голоморфная в Γ функция $F(z)$, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=|F(z)|^2.$$

Пусть $\overline{\Delta}$ — замкнутая область внутри Γ и ρ — положительное число, меньшее расстояния от $\overline{\Delta}$ до окружности Γ. Пусть z — точка из $\overline{\Delta}$ и γ_z — круг с центром в z и радиусом ρ. Этот круг лежит внутри Γ, и

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z+e^{\theta i}r)\,d\theta,$$

где r и θ — полярные координаты в γ_z. Умножая на r обе части последнего равенства и интегрируя по r от 0 до ρ, получим

$$\frac{\rho^2}{2}F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho} r\,dr\int_0^{2\pi} F(z+e^{\theta i}r)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\iint_{\gamma_z} F(\zeta)\,d\xi\,d\eta,$$

где $\zeta=\xi+i\eta$ — любая точка из γ_z. Следовательно,

$$|F(z)|^2\leqslant\frac{1}{\pi^2\rho^4}\left[\iint_{\gamma_z}|F(\zeta)|\,d\xi\,d\eta\right]^2,$$

и, применяя неравенство Шварца, получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=|F(z)|^2\leqslant\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{\gamma_z}|F(\zeta)|^2\,d\xi\,d\eta=\frac{1}{\pi\rho^2}D_{\gamma_z}(u)$$

и, значит, *тем более* для любых (x, y) в $\bar{\Delta}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2} D_\Gamma(u),$$

что и дает искомую оценку.

5. Гармоническая функция на римановой поверхности. Действительная конечная функция $\varphi(p)$, определенная и непрерывная в открытой области Ω римановой поверхности R, называется гармонической в Ω, если она будет гармонической в любом простом круге из R, лежащем в Ω, в смысле определения п. 3. То же определение применимо и ко всей поверхности R.

Для того чтобы получить аналитическую функцию, соответствующую римановой поверхности R, мы сначала построим функцию, гармоническую на R. Можно, однако, заметить, что если R замкнута, то всякая функция, гармоническая на всей поверхности R и достигающая своего максимума в точке из R, сводится к постоянной; поэтому мы возьмем особую точку P и будем строить гармоническую функцию в $R - P$.

Метод, который мы будем излагать, принадлежит, в основе своей, Вейлю [1]), но был упрощен Курантом и Фату [2]). Этому упрощенному методу мы и будем следовать здесь почти без изменений.

Построение гармонической функции опирается на две вспомогательные теоремы:

I. *Пусть задана открытая и компактная в R область Ω и последовательность функций*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

гармонических в Ω и таких, что

$$\lim_{m, n \to \infty} D_\Omega(u_m - u_n) = 0.$$

---

[1]) H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Лейпциг — Берлин, 1913.

[2]) Hurwitz und Courant, Funktionentheorie, Берлин, 1929 (см. русский перевод: Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, Гостехиздат, 1934; А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, Гостехиздат, 1933. — *Прим. ред.*); P. Fatou, Fonctions automorphes, Париж, 1930 (P. Appel et E. Goursat, Theorie des fonctions algebriques, 2-е изд., т. II).

Тогда, если последовательность $\{u_n\}$ *сходится в некоторой точке из* Ω, *то она равномерно сходится в любой замкнутой области* $\overline{\Delta} \subset \Omega$.

Очевидно, достаточно доказать теорему для любого круга из R, так как область Ω, компактную в R, можно покрыть конечным числом таких кругов. Один из них содержит точку сходимости, и тогда теорема, доказанная для этого круга, показывает, что такая точка существует в каждом из остальных кругов.

С другой стороны, конформное отображение, позволяющее любой кратный круг перевести в простой, показывает, что можно ограничиться этими последними.

Пусть ε — произвольное положительное число. Для достаточно больших m и n имеем в Ω

$$D_\Omega (u_m - u_n) < \varepsilon,$$

откуда, пользуясь полученной выше оценкой, получаем в $\overline{\Delta}$

$$\left| \frac{\partial (u_m - u_n)}{\partial x} \right|^2 < \frac{\varepsilon}{\pi\rho^2} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial (u_m - u_n)}{\partial y} \right|^2 < \frac{\varepsilon}{\pi\rho^2},$$

где ρ зависит только от $\overline{\Delta}$.

Отсюда следует, что последовательности

$$\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\}$$

равномерно сходятся в $\overline{\Delta}$. Мы можем всегда выбрать $\overline{\Delta}$ так, чтобы точка сходимости была внутри $\overline{\Delta}$. Тогда из формулы

$$u_n(x, y) - u_n(x_0, y_0) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u_n}{\partial x} dx + \frac{\partial u_n}{\partial y} dy$$

следует, что $u_n(x, y)$ равномерно сходится в $\overline{\Delta}$.

Замечание. В силу классической теоремы Гарнака предел последовательности есть функция, гармоническая во всей области Ω.

II. *Пусть* $\Omega_0 \subset R$ — *открытая компактная в* R *область, расположенная на одном листе* [1]), Ω — *область из*

[1]) Это значит, что две различные точки из Ω_0 имеют различные проекции на (z).

Ω_0 и δ — прямолинейный отрезок порции[1]) *границы области Ω, лежащей в Ω_0. Предположим, что*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

— последовательность гармонических в Ω и непрерывных на $\Omega + \delta$ функций таких, что

$$\lim_{n \to \infty} D_\Omega(u_n) = 0.$$

Тогда, если $u_n \equiv 0$ на δ, то функции u_n образуют сходящуюся в Ω последовательность, имеющую пределом тождественный нуль.

Так как здесь всё происходит на одном листе поверхности R, то можно предположить, что Ω есть плоская область. Значит, можно продолжить u_n вдоль δ по принципу симметрии, беря равные значения с противоположными знаками в точках, симметричных относительно δ. Тогда, обозначив через Ω_1 область, полученную из Ω при помощи принципа симметрии, получим

$$\lim_{n \to \infty} D_{\Omega + \delta + \Omega_1}(u_n) = 0.$$

Теперь достаточно применить в открытой области $\Omega + \delta + \Omega_1$ оценку п. 4, чтобы вывести отсюда, что

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_n}{\partial y}$$

равномерно стремятся к нулю во всякой замкнутой области

$$\overline{\Delta} \subset \Omega + \delta + \Omega_1.$$

Так как $u_n \equiv 0$ на δ, лежащей в $\overline{\Delta}$, если выбрать последнюю надлежащим образом, то очевидно, что u_n стремится к нулю в $\overline{\Delta}$, а значит, и в Ω.

Замечание. В формулировке предыдущей теоремы можно отрезок заменить аналитической дугой, например дугой круга, что мы и сделаем ниже. В самом деле, здесь опять используются только свойства, инвариантные относительно конформного отображения, а известно,

---

[1]) *Порцией* множества называется общая часть этого множества с некоторым открытым множеством.

что достаточно малую аналитическую дугу можно конформным отображением перевести в отрезок.

6. Рассмотрим теперь на римановой поверхности R точку P, которую для простоты предположим обыкновенной и проектирующейся в точку $z=0$. Предположим, что риманова поверхность покрыта счетным множеством простых и кратных кругов $\Gamma_i (i=1, 2, \ldots)$ таким образом, что всякий круг Γ_i имеет общие точки лишь с конечным числом других кругов Γ_i[1]). Мы можем допустить, что система Γ_i удовлетворяет еще двум легко осуществимым условиям:

1° Никакой круг Γ_i не содержится целиком в другом круге Γ_i.

2° Точка P является центром Γ_1 и не принадлежит ни одному из других кругов Γ_i.

Условие 1° может быть выполнено, в случае надобности, путем выбрасывания некоторых кругов из заданного множества; условие же 2° — заменой конечного числа кругов Γ_i конечным числом других кругов.

Рассмотрим теперь дополнительный круг $C \subset R$ с центром в точке P, лежащий целиком внутри Γ_1 и не имеющий общих точек ни с каким кругом Γ_i, где $i \geqslant 2$. Такой круг C существует в силу условия 2°. Следуя Вейлю, определим теперь на R функцию S при помощи следующих условий:

1° $S = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{x}{a^2}$ внутри C, где a — радиус проекции круга C, а x и y — координаты проекции точек круга C на (z).

2° $S \equiv 0$ вне C и на его границе.

Будем говорить, что функция Φ, определенная на R, принадлежит *семейству* (Φ), если она удовлетворяет следующим условиям:

1° $S+\Phi$ непрерывна на R всюду, кроме точки P[2]).

2° Φ непрерывна в P и, следовательно, непрерывна на R всюду, кроме границы круга C.

3° Во всякой области поверхности R, не содержащей точек этой границы, Φ принадлежит семейству (A) в смысле приведенного выше определения.

---

[1]) См. эгу главу, раздел I, п. 6.

[2]) P проектируется на (z) в точку $x=y=0$.

4° Интеграл $D_R(\Phi)$, значение которого определяется как сумма интегралов Дирихле для частей поверхности R, внутренних и внешних к C, конечен.

Сразу же заметим, что все функции семейства (Φ) претерпевают на границе круга C одинаковые скачки. Разность двух таких функций непрерывна на R и принадлежит на R семейству (A).

Ясно, что функции, принадлежащие семейству (Φ), существуют. Пусть, например, функция N определена на R следующим образом:

1° $N=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{x}{r^2}$ внутри круга Γ_1, где r обозначает радиус проекции Γ_1 .

2° $N\equiv 0$ вне Γ_1 и на его границе.

Функция N непрерывна на R всюду, кроме точки P, и $N-S$ принадлежит семейству (Φ), так как очевидно, что условия 1°, 2°, 3° и 4° выполняются.

Если Φ пробегает все семейство, то величина

$$D_R(\Phi)$$

имеет конечную нижнюю грань d, которая, очевидно, неотрицательна. Следовательно, существует последовательность функций Φ, пусть это будут функции

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots,$$

таких, что

$$\lim_{n\to\infty} D_R(\Phi_n)=d.$$

Такая последовательность называется *минимизирующей.*

7. Свойства минимизирующих последовательностей. Вместе с минимизирующей последовательностью $\{\Phi_n\}$ рассмотрим другую последовательность функций:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots,$$

принадлежащих семейству (A) на R и таких, что

$$D_R(\varphi_n) < M,$$

где M — фиксированное число.

Я утверждаю прежде всего, что

$$\lim_{n\to\infty} D_R(\Phi_n, \varphi_n)=0. \tag{8}$$

Действительно, пусть h — постоянная; тогда для любого n

$$D_R(\Phi_n - h\varphi_n) \geqslant d.$$

Следовательно[1],

$$D(\Phi_n)\geqslant d+h\,[2D(\Phi_n, \varphi_n)-hD(\varphi_n)]. \tag{9}$$

Если бы (8) не имело места, то нашлось бы такое положительное число α, что

$$D(\Phi_n, \varphi_n)>\alpha \quad \text{или} \quad D(\Phi_n, \varphi_n)<-\alpha$$

для бесконечного множества значений n. Для определенности предположим, что имеет место первый случай. Так как $D(\varphi_n) < M$, то неравенство (9) можно заменить следующим неравенством, справедливым для бесконечного множества значений n и для $h>0$:

$$D(\Phi_n)\geqslant d + h(2\alpha - hM).$$

Если взять $h=\frac{\alpha}{M}$, то будет выполняться неравенство

$$D(\Phi_n)\geqslant d+\frac{\alpha^2}{M},$$

которое не может иметь места для бесконечного множества значений, так как $\{\Phi_n\}$ — минимизирующая последовательность. Следовательно, соотношение (8) доказано.

Положим теперь

$$\varphi_n = \Phi_m - \Phi_n,$$

где m произвольным образом неограниченно возрастает вместе с n. Так как $D(\Phi_m)$ и $D(\Phi_n)$ ограничены, то для любых m и n

$$D(\Phi_m - \Phi_n) < M,$$

[1]) Мы опускаем здесь R в обозначениях $D_R(\Phi)$ и $D_R(\Phi, \varphi)$, так как это не вызывает никаких недоразумений.

и, значит, последовательность φ_n удовлетворяет поставленным выше условиям. Следовательно, имеем

$$\lim_{m,\, n\to\infty} D(\Phi_m - \Phi_n,\ \Phi_n) = 0.$$

Но

$$D(\Phi_m) = D(\Phi_m - \Phi_n) + 2D(\Phi_m - \Phi_n,\ \Phi_n) + D(\Phi_n),$$

и, устремляя m и n к бесконечности, получаем

$$\lim_{m,\, n\to\infty} D_R(\Phi_m - \Phi_n) = 0. \tag{10}$$

Соотношение (10) будет очень важно в дальнейшем. Оно имеет место при произвольном способе стремления m и n к бесконечности и представляет собой основное свойство минимизирующих последовательностей.

8. Гармонизация минимизирующей последовательности. Только что доказанное свойство позволит нам, как мы увидим, *гармонизировать* последовательность $\{\Phi_n\}$.

Определим для этого функции Φ_n^1 следующим образом:

1° $\Phi_n^1 \equiv \Phi_n$ вне Γ_1 и на его границе,

2° $\Phi_n^1 = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{a^2} - S + V_n$ в Γ_1, где V_n — гармоническая функция в Γ_1, принимающая на границе Γ_1 значения

$$\Phi_n - \left(\frac{x}{r^2} + \frac{x}{a^2}\right),$$

так что Φ_n^1 непрерывна на этой границе. Обозначим через B функцию, определенную на Γ_1 следующим образом:

1° $B \equiv 0$ внутри C,

2° $B = -\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{a^2}\right)$ в $\overline{\Gamma_1 - C}$.

Тогда

$$\Phi_n^1 + B = V_n$$

и гармоническая в Γ_1 функция V_n принимает на границе Γ_1 те же значения, что и $\Phi_n + B$, не являющаяся

гармонической, но принадлежащая семейству (A) в Γ_1. Значит, в силу результата, доказанного в п. 3, имеем

$$D_{\Gamma_1}(V_n) = D_{\Gamma_1}(\Phi_n^1 + B) \leqslant D_{\Gamma_1}(\Phi_n + B),$$

или, раскрывая,

$$D_{\Gamma_1}(\Phi_n^1) \leqslant D_{\Gamma_1}(\Phi_n) + D_{\overline{\Gamma_1 - C}}(\Phi_n - \Phi_n^1,\ B), \tag{11}$$

так как $B \equiv 0$ в C.

К последнему члену неравенства (11) можно применить формулу Грина (см. п. 2), так как $\Phi - \Phi_n^1$, очевидно, принадлежит семейству (A) в $\overline{\Gamma_1 - C}$, а B непрерывна вместе со всеми своими производными. Но в этой области $\Delta B = 0$ и (как показывает вычисление) $\frac{\partial B}{\partial n} = 0$ на границе круга C. Так как, с другой стороны, $\Phi_n - \Phi_n^1 = 0$ на границе Γ_1, то формула Грина дает

$$D_{\overline{\Gamma_1 - C}}(\Phi_n - \Phi_n^1,\ B) = 0,$$

и, следовательно, (11) показывает, что

$$D_R(\Phi_n^1) \leqslant D_R(\Phi_n).$$

Таким образом, функции Φ_n^1 принадлежат семейству (Φ) и, значит, *тем более* образуют минимизирующую последовательность.

Теперь на основании результатов предыдущего раздела получаем, что

$$\lim_{m,\, n \to \infty} D_R(\Phi_m^1 - \Phi_n^1) = 0$$

и *тем более*

$$\lim_{m,\, n \to \infty} D_{\Gamma_1}(\Phi_m^1 - \Phi_n^1) = 0,$$

а также, согласно определению Φ_n^1,

$$\lim_{m,\, n \to \infty} D_{\Gamma_1}(V_m - V_n) = 0. \tag{12}$$

Но Φ_n определены лишь с точностью до аддитивной постоянной, так как в рассуждении используется лишь их свойство образовывать минимизирующую последователь-

ность. Значит, мы можем выбрать эти постоянные так, чтобы среднее значение функции V_n на окружности круга Γ_1 было равно нулю. Это среднее значение, как известно, равно значению V_n в центре. Следовательно, последовательность $\{V_n\}$ сходится в центре круга. Тогда из (12), применив теорему 1 п. 5, получаем, что предел

$$\lim_{n\to\infty} V_n$$

существует и представляет собой гармоническую функцию внутри Γ_1. Обозначим этот предел через V; тогда

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n^1 = V - B = U_1,$$

где функция U_1, определенная лишь внутри Γ_1, есть гармоническая функция в этом круге, за исключением границы круга C, *где она имеет скачок. Функция.*

$$U_1 + S = V + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x}{a^2}$$

является непрерывной и гармонической в $\Gamma_1 - P$.

Пусть теперь Γ_2 — круг Γ_i, имеющий общие внутренние точки с Γ_1. По самому выбору кругов Γ_i, Γ_2 не может иметь общих точек с C. Гармонизируем теперь последовательность Φ_n^1 в Γ_2, заменяя ее последовательностью Φ_n^2, определенной следующим образом:

1° $\Phi_n^2 \equiv \Phi_n^1$ вне Γ_2 и на его границе;

2° Φ_n^2 есть гармоническая функция в Γ_2, равная Φ_n^1 на границе Γ_2.

Так как Φ_n^2 — гармоническая *всюду* в Γ_2, то мы сразу же на основании принципа минимума, установленного в п. 3, получаем неравенство

$$D_R(\Phi_n^2) \leqslant D_R(\Phi_n^1),$$

которое показывает, что функции Φ_n^2 принадлежат семейству (Φ) и что они образуют минимизирующее семейство.

В силу этого последовательность

$$\Phi_1^1,\ \Phi_1^2,\ \Phi_2^1,\ \Phi_2^2,\ \ldots,\ \Phi_n^1,\ \Phi_n^2,\ \ldots$$

есть минимизирующая последовательность и, значит, в частности,

$$\lim_{n\to\infty} D_R(\Phi_n^1-\Phi_n^2)=0$$

и *тем более*

$$\lim_{n\to\infty} D_{\Gamma_1\Gamma_2}(\Phi_n^1-\Phi_n^2)=0. \tag{13}$$

Но $\Gamma_1\Gamma_2$ составляет часть области поверхности R на одном листе. Все функции $\Phi_n^1-\Phi_n^2$ являются гармоническими внутри области $\Gamma_1\Gamma_2$ и непрерывны на ее границе. Эта граница включает в себя порцию, являющуюся дугой окружности, на которой $\Phi_n^1-\Phi_n^2\equiv 0$. Поэтому формула (13) и теорема II п. 5 (с замечанием в конце доказательства) показывают, что

$$\lim_{n\to\infty}(\Phi_n^1-\Phi_n^2)=0 \tag{14}$$

внутри $\Gamma_1\Gamma_2$.

С другой стороны, так как последовательность Φ_n^2 минимизирующая, то

$$\lim_{m,\,n\to\infty} D_{\Gamma_2}(\Phi_m^2-\Phi_n^2)=0.$$

А так как (14) показывает, что внутри Γ_2 существует точка сходимости для Φ_n^2, то теорема I п. 5 позволяет утверждать, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n^2=U_2$$

существует и является гармонической функцией в Γ_2. Но в силу (14) в $\Gamma_1\Gamma_2$

$$U_1\equiv U_2,$$

то есть гармоническая функция U_2 является продолжением в $\Gamma_1+\Gamma_2$ функции U_1.

Таким же образом можно гармонизировать последовательность Φ_n^2 в Γ_3, заменяя ее последовательностью Φ_n^3, определенной исходя из Φ_n^2 точно так же, как Φ_n^2 была определена исходя из Φ_n^1. Итак, в каждом круге Γ_i,

для $i \geqslant 2$, будет определена гармоническая функция U_i без особенностей и такая, что в общей части двух кругов Γ_i соответствующие функции U_i совпадают. Следовательно, совокупность функций U_i образует функцию U, определенную и непрерывную во всех точках поверхности R [1]), кроме точек границы C. Функция U такова, что

$$u = U + S$$

определена и гармонична в $R - P$. В точке P функция u имеет особенность того же типа, как и функция

$$\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Итак, мы построили искомую гармоническую функцию. Можно показать, что входящая в ее выражение функция U является с точностью до аддитивной постоянной характеристической функцией, так как она дает минимум интегралу Дирихле в классе функций семейства (Φ). Однако нам не понадобится это свойство, за доказательством которого мы отсылаем к цитируемым выше трудам Вейля, Куранта и Фату.

9. Используя функцию u, мы построим теперь аналитическую функцию, соответствующую римановой поверхности R. Чтобы отметить, что u обладает особой точкой P, мы будем обозначать ее через u_P и вообще аналогичное обозначение будем употреблять для функции, построенной так же, как u_P, и имеющей в качестве особой любую другую точку на R.

Рассмотрим теперь множества

$$\Delta_i = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_i,$$

каждое из которых состоит из конечного числа замкнутых и компактных в R областей и сумма которых равна R. Очевидно, для любого значения i

$$\Delta_i \subset \Delta_{i+1}.$$

---

[1]) Процесс построения показывает, что U (а значит, и u) есть однозначная функция на R.

Возьмем в $\Delta_{n+1} - \Delta_n = E_n$ конечное число точек A_j так, чтобы в E_n всякий круг поверхности R, диаметр[1]) которого больше $1/n$, содержал по крайней мере одну такую точку. Такой выбор точек A_j возможен, так как все Δ_i могут быть покрыты конечным числом кругов поверхности R. Тогда множество всех точек A_j счетно. Более того, точки A_j можно выбрать так, чтобы их проекции на (z) были различны и не совпадали с проекциями точек ветвления. Точки A_j мы занумеруем так, чтобы при $n' \leqslant n''$ никакая точка $A_j \in E_{n'}$ не имела номера, большего или равного номеру точки A_j из $E_{n''}$.

Рассмотрим теперь функции

$$u_{A_j},$$

соответствующие точкам A_j точно так же, как построенная выше функция u соответствовала точке P. Пусть $k(r)$ — наибольший номер, такой, что A_r лежит вне $\Delta_{k(r)}$. Функция $k(r)$ не убывает, а в случае, когда R — открытая риманова поверхность, неограниченно возрастает с возрастанием r. Модуль $|u_{A_r}|$ непрерывен в $\Delta_{k(r)}$; так как эта область замкнута и компактна в R, то найдется такое положительное число M_r, что в $\Delta_{k(r)}$

$$|u_{A_r}| < M_r \;{}^{2)}.$$

Тогда ряд[3])

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j M_j} u_{A_j}$$

абсолютно и равномерно сходится в любой замкнутой компактной области из R, не содержащей точек A_j. Пусть H — сумма этого ряда; H является гармонической функцией в $R - \sum_j A_j$. В точках A_j она обращает-

[1]) Диаметр круга поверхности R есть диаметр его проекции на (z).

[2]) Доказательство этого факта проводится точно так же, как и в случае евклидовых пространств.

[3]) В случае, когда R — замкнутая риманова поверхность, вместо ряда мы рассмотрим соответствующую конечную сумму. *(Прим. ред.)*

ся в бесконечность, так же как S в точке P с проекцией $z=0$. Теперь положим

$$\varphi = \frac{\partial H}{\partial x} - i\frac{\partial H}{\partial y};$$

тогда φ будет однозначной на R. Рассматриваемая как функция от $z=x+iy$, φ будет аналитической функцией, имеющей полюсы в A_j и не имеющей никаких других особенностей в обыкновенных точках поверхности R. В точках ветвления R функция $\varphi(z)$ будет иметь критические алгебраические особенности, в которых φ может быть бесконечной. Все эти точки определяют вейерштрассовские или алгебраические элементы; следовательно, $\varphi(z)$ есть *аналитическая функция, определенная на всей поверхности* R.

Пусть теперь R_0 — риманова поверхность функции $\varphi(z)$, построенная, как на стр. 61. Покажем, что R_0 *тождественна* с R. В самом деле, R_0 не может содержать точек, не принадлежащих R, так как вне R продолжение не может осуществляться по той причине, что точки A_j накапливаются при выходе из любой Δ_i. Более того, R_0 не может составлять лишь часть R, так как, с одной стороны, всякая точка проекции R является также точкой проекции R_0, а с другой стороны, легко показать, что двум точкам из R, имеющим одну и ту же проекцию, не может соответствовать один и тот же элемент функции $\varphi(z)$ (вейерштрассовский или алгебраический), то есть одна точка на R_0. В самом деле, пусть P_1 и P_2 — две точки из R, для которых соответствующие разложения функции $\varphi(z)$ будут тождественны, и пусть z_0 — общая проекция точек P_1 и P_2. Осуществляя на R продолжение вдоль пути L, лежащего на R[1]), можно прийти из P_1 через обыкновенные точки R, например, в точку A_1. Это продолжение соответствует вейерштрассовскому продолжению, осуществленному из z_0 вдоль проекции L_0 линии L на (z). Если заменить точку P_1 точкой P_2, то, так как элементы, соответствующие этим двум точкам, предполагались тождественными, продолжение

[1]) Путь, лежащий на R, есть образ в R отрезка прямой при непрерывном отображении. См. ниже, гл. III.

закончится либо в той же точке $A_1 \in R$, либо в точке B, которой соответствует тот же элемент, что и точке A_1. Первое предположение исключается, так как оно приводит к совпадению точек P_1 и P_2. Но если A_1 и B имеют одинаковую проекцию и A_1 — полюс, то B должна быть обыкновенной точкой функции φ в силу построения точек A_j на R. Это означает, что элементы точек P_1 и P_2 не могут быть тождественными, что противоречит нашему предположению. Следовательно, риманова поверхность R_0 совпадает с R, и теорема полностью доказана.

Итак, *всякой заданной a priori римановой поверхности соответствует аналитическая функция, риманова поверхность которой есть R, и даже существует бесконечное множество таких функций.*

Эта теорема, известная со времени Римана для замкнутых поверхностей и алгебраических функций и содержащая в себе глубокие математические понятия, была доказана в общем случае Кёбе лишь в 1909 г.[1]. Одним из ее ниболее важных следствий является то, что при классификации и изучении аналитических функций нужно в первую очередь исходить из многообразий, являющихся римановыми поверхностями. Вытекающие отсюда свойства относятся к наиболее глубоким свойствам аналитических функций. В следующей главе мы будем изучать исключительно *топологические* свойства римановых поверхностей и соответствующих им функций.

---

[1]) Comptes rendus, т. 148, 1909, стр. 1446. См. также Osgood, Funktionentheorie, I, где теорема получена при помощи основной теоремы униформизации, доказанной Пуанкаре и Кёбе, и тэта-функций Пуанкаре; см. также цитируемые выше книги Вейля, Куранта и Фату.

Кёбе создал также общую теорию, основанную целиком на рассмотрениях, относящихся к теории функций комплексного переменного, в своей известной работе Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (Acta Mathematica, т. 50, 1927).

ГЛАВА III
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

I. Топологические поверхности. Ориентируемость

1. Предварительные определения. *Непрерывной кривой* (*линией* или *путем*) многообразия V называется образ в V отрезка прямой при непрерывном отображении. Образы концов отрезка называются концами непрерывной кривой.

Взаимно однозначный и взаимно непрерывный образ отрезка прямой в V называется *простой дугой*; аналогично взаимно однозначный и взаимно непрерывный образ окружности называется *простой замкнутой кривой.* Согласно классической теореме Жордана простая замкнутая кривая евклидовой плоскости определяет на этой плоскости две различные области, для которых служит общей границей. Одна из этих областей компактна (в данном случае ограничена); ее называют плоской жордановой областью. Вообще же *жордановой областью многообразия* V двух измерений называется взаимно однозначный и взаимно непрерывный образ плоской жордановой области.

Жорданова область T на V с тремя отмеченными граничными точками называется *треугольником* многообразия V. Эти три точки называются *вершинами* T, а простые дуги границы T, имеющие их в качестве своих концов, называются *сторонами* T.

2. Двумерное многообразие V называется *триангулируемым*, если на V существует не более чем счетное множество треугольников T_i, удовлетворяющих следующим условиям:

1° $\sum\limits_i T_i = V$.

2° Если $i \neq j$, то пересечение $T_i T_j$ либо пусто, либо является вершиной, либо стороной T_i и T_j.

3° Точки любого компактного в V множества принадлежат не более чем конечному числу T_i [1]).

Топологической поверхностью называется двумерное триангулируемое [2]) многообразие. В настоящих лекциях всюду, где это не будет вызывать недоразумений, мы будем употреблять термин *поверхность*, имея в виду *топологическую поверхность*.

Ясно, что всякая поверхность допускает бесконечное число различных триангуляций, то есть T_i можно выбирать на поверхности бесконечным числом способов, так, чтобы выполнялись три условия триангулируемости. В самом деле, можно, например, разбить треугольники T_i некоторой заданной триангуляции на треугольники, удовлетворяющие тем же условиям; тогда, заменив треугольники T_i новыми треугольниками, получим триангуляцию, подчиненную заданной; но можно сгруппировать новые треугольники так, чтобы получить триангуляцию, не подчиненную заданной.

Определение двумерного многообразия и условие 3° триангулируемости показывают, что для любой точки $p \in V$ существует окрестность этой точки, гомеоморфная евклидовой плоскости и содержащая точки лишь тех треугольников T_i, которым принадлежит p. Такая окрестность точки p называется нормальной (для заданной триангуляции).

Выполняя топологическое отображение окрестностей на плоскость и принимая во внимание сформулированные выше условия триангулируемости, получаем, что:

а) Всякая точка треугольника T_i, не лежащая ни на одной из его сторон, принадлежит только *одному* этому треугольнику.

---

[1]) Отсюда следует, в частности, что любая точка из V может принадлежать лишь конечному числу T_i.

[2]) Ниже мы покажем, что существуют нетриангулируемые многообразия.

b) Всякая точка треугольника T_i, лежащая на его стороне, но не являющаяся его вершиной, принадлежит *двум* и только двум треугольникам T_i.

c) Всякая вершина принадлежит *конечному* числу треугольников T_i, которые располагаются в циклической последовательности вокруг их общей вершины.

Заметим еще, что любая триангуляция *замкнутого* многообразия состоит из *конечного* числа T_i, в то время как для *открытого* многообразия число T_i *бесконечно.* Все замкнутые и открытые поверхности можно получить, склеивая конечное или бесконечное число треугольников так, чтобы выполнялись условия a), b) и c). Комбинаторная топология исходит из этого общего принципа при определении поверхностей, а также более общих пространств, которые она изучает.

3. Рассмотрим поверхность S и на ней простую замкнутую кривую Γ. *Окрестностью* кривой Γ называется любая открытая область G, содержащая Γ. Каждая точка кривой Γ обладает внутри G окрестностью, гомеоморфной евклидовой плоскости, и кривую Γ можно покрыть конечным числом этих окрестностей. Таким образом, очевидно, что множество $G - \Gamma$ состоит *не более* чем из *двух* различных областей. Если число областей, составляющих $G - \Gamma$, равно именно двум, то говорят, что Γ разбивает G. Если $G - \Gamma$ состоит только из одной области, *какова бы ни была окрестность* G кривой Γ, то говорят, что Γ — *однобережная* кривая; в случае же существования окрестностей G, разделяемых кривой Γ, последняя называется *двубережной* кривой, а две составляющие разделенной окрестности называются ее сторонами в G. На евклидовой плоскости или на сфере всякая простая замкнутая кривая является двубережной; это следует из классической теоремы Жордана о простых замкнутых кривых. Но существуют поверхности, на которых можно определить однобережные кривые[1]).

Поверхность называется *ориентируемой*, если любая простая замкнутая кривая, лежащая на этой поверхности, будет двубережной. Всякая поверхность, содержащая

[1]) Ниже мы покажем, как можно построить такие поверхности.

хотя бы одну одностороннюю кривую, называется *неориентируемой.*

Понятие топологической ориентируемой (а значит, и неориентируемой) поверхности, так же как и понятие топологической поверхности, инвариантно относительно наиболее общих взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений; всякий топологический эквивалент такой поверхности есть поверхность того же типа. Следовательно, введенные нами новые понятия, так же как и предыдущие, принадлежат к понятиям топологическим.

4. Правомерность терминов «ориентируемая и неориентируемая поверхность» видна из следующих рассмотрений.

Пусть задана триангуляция поверхности S. Назовем *цепью* треугольников конечную последовательность треугольников

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n$$

заданной триангуляции, таких, что T_i и T_{i+1} ($i=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n-1$) имеют общую сторону. Очевидно, что во всяком связном многообразии любые две точки можно соединить непрерывной линией, лежащей на этом многообразии. Следовательно, любые две точки на поверхности могут быть соединены цепью треугольников, то есть будут всегда принадлежать какой-то одной цепи. Если в этой цепи треугольники T_1 и T_n имеют общую сторону, то такая цепь замкнута и называется *циклом* треугольников.

Рассмотрим, вообще, на S две жордановы области D_1 и D_2 с границами Γ_1 и Γ_2. Предположим, что общая часть областей D_1 и D_2 состоит из одной простой дуги $\sigma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$. Выберем на Γ_1 направление обхода, определяющее положительную ориентацию области D_1. Эта ориентация устанавливает на σ направление обхода от одного из ее концов α к другому концу β. Направление обхода кривой Γ_2, установленное обходом σ от β к α, будет, по определению, положительным направлением ориентации области D_2, *индуцированным* ориентацией D_1. Значит, если выбрать положительное направление обхода для треугольника T_1 на S, то это направление

индуцирует направление обхода для любого другого треугольника T_i из S через цепь, связывающую T_1 и T_i. Очевидно, для того чтобы различные цепи, связывающие T_1 и T_i, приводили всегда к одному и тому же положительному обходу для T_i (то есть для того, чтобы любому треугольнику на S можно было раз и навсегда приписать положительную ориентацию), необходимо и достаточно, чтобы всякий цикл треугольников при возврате к первому треугольнику определял на нем ту же положительную ориентацию, которая была первоначально выбрана. Будем говорить в этом случае, что всякий цикл сохраняет ориентацию; этим свойством, очевидно, обладает тогда и любая подчиненная триангуляция, и обратно. Поэтому следующая теорема обосновывает термины «ориентируемый» и «неориентируемый»:

Для того чтобы поверхность S была ориентируемой, необходимо и достаточно, чтобы в триангуляции поверхности S всякий цикл треугольников сохранял ориентацию.

Прежде чем доказать эту теорему, сделаем замечание, касающееся ориентированных жордановых областей. Пусть D — такая область, Γ — ее граница и γ — простая дуга, лежащая в D и имеющая с Γ две точки — свои концы. Дуга γ разбивает D на две жордановы области D' и D'', называемые сторонами γ в D. Стороне D' соответствует направление обхода, определенное на γ при обходе границы Γ в положительном направлении. Стороне D'' аналогичным образом соответствует направление, противоположное определенному на γ.

Предположим теперь, что существует цикл треугольников (C), в котором T_1 является первым, а T_n — последним и который не сохраняет ориентацию T_1. Во множестве

$$\Delta = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$

можно провести простую замкнутую кривую K так, чтобы KT_i была простой дугой, имеющей с границей T_i лишь две общие точки — свои концы. Покажем, что кривая K не разбивает Δ. В самом деле, совокупность сторон, соответствующих выбранному на K направлению

обхода дуги KT_i в T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, есть область, занимающая в $T_1 + T_n$ заштрихованные на рисунке 2 части. В этом легко убедиться, если принять во внимание наше предположение о том, что (C) не сохраняет ориентацию T_1, и рассмотреть стрелки, указывающие положительное направление обхода в T_1 и T_n. Для любой окрестности G кривой K можно указать область $\Delta' \subset G$, содержащую K и образованную, так же как Δ, из треугольников цикла, принадлежащего подчиненной триангуляции и не сохраняющего ориентацию. Рассуждения, относящиеся к Δ, применимы и к Δ' и показывают, таким образом, что кривая K не разбивает никакую из своих окрестностей.

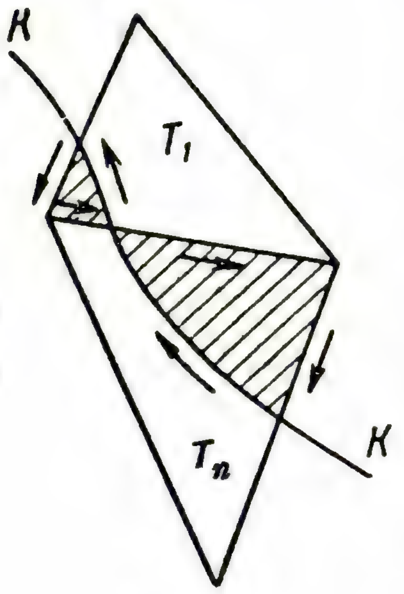

Рис. 2.

Обратно: если все циклы сохраняют ориентацию, то S ориентируема. В самом деле, если бы это было не так, то на S нашлась бы хоть одна одnобережная кривая K. Используя K, можно получить триангуляцию, подчиненную заданной на S, таким образом, чтобы K была суммой сторон треугольников. Тогда все треугольники, имеющие на K хотя бы одну точку, образуют область, не разбиваемую кривой K, так как эта кривая является однобережной. Полученная область содержит такой цикл (C), в котором общая сторона треугольников T_1 и T_n лежит на K. Будем обходить последовательно каждый треугольник T_i этого цикла в положительном направлении, индуцированном T_1. При каждом из этих обходов область, примыкающая к K, будет обходиться в том же направлении, что и K. То же самое, в частности, будет иметь место и для T_1 и T_n, откуда следует, что (C) не сохраняет ориентацию треугольника T_1, вопреки предположению. Значит, теорема полностью доказана[1]).

---

[1]) Это рассуждение показывает, что если условие достаточно для одной триангуляции, то оно будет достаточным и для всякой другой триангуляции поверхности S.

II. Неориентируемые поверхности и нетриангулируемые многообразия. Условие триангулируемости многообразия

1. Неориентируемые поверхности. Большая часть фигур, которые мы обычно называем поверхностями, — это поверхности ориентируемые. Ниже мы покажем, что многообразия, названные нами римановыми поверхностями, являются поверхностями в смысле данного в этой главе определения, и даже ориентируемыми. Однако легко дать примеры неориентируемых поверхностей. Два наиболее важных типа таких поверхностей представляют лист Мёбиуса (открытая поверхность) и проективная плоскость (замкнутая поверхность). Первую из них можно получить из прямоугольника (листа бумаги), вершины которого обозначены в циклическом порядке буквами A, B, C, D, склеивая сторону AB со стороной CD так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B — с точкой D. Полученная таким способом фигура имеет только один край, образующий в пространстве простую замкнутую кривую. Если отбросить этот край, то останется открытая неориентируемая поверхность: в самом деле, всякая замкнутая кривая, полученная при указанном склеивании из простой дуги, лежащей в прямоугольнике $ABCD$ с концами на сторонах AB и CD[1]), будет однобережной кривой.

2. Проективная плоскость. Так называют пространство H, состоящее из двух типов точек:

1) точек евклидовой плоскости, называемых *конечными* точками пространства H;

2) бесконечного множества других элементов, которые мы назовем *несобственными* точками, а их совокупность — *бесконечно удаленной* прямой. Каждая из этих точек полностью определяется направлением δ на плоскости (или множеством всех прямых, параллельных этому направлению).

Для того чтобы сделать H топологическим пространством, определим предельные точки для подмножеств

---

[1]) Для того чтобы кривая, полученная из этой дуги, была *замкнутой*, необходимо, чтобы ее концы совпали при склеивании сторон AB и CD, но не были бы вершинами прямоугольника.

из H при помощи следующего соглашения. Конечная точка p будет предельной точкой для $E \subset H$, если E содержит множество E_1 конечных точек, для которых p — предельная точка в евклидовом смысле. Несобственная точка q, определенная при помощи направления δ, будет предельной точкой множества E, если для любого $\varepsilon > 0$ в E найдется отличная от q несобственная точка, направление которой составляет с δ угол, меньший ε, или конечная точка p, отстоящая сколь угодно далеко от любой фиксированной конечной точки $O \in H$ и такая, что направление[1]) Op составляет с направлением δ угол, меньший ε. Очевидно, что это определение удовлетворяет условиям, сформулированным в начале главы I, и, следовательно, H есть топологическое пространство.

Пространство H является двумерным многообразием. В самом деле, любая конечная точка есть центр круга, состоящего из конечных точек. Что же касается несобственной точки, определенной направлением δ, то она содержится в открытом множестве G, состоящем из следующих двух типов точек из H:

a) конечных точек, лежащих внутри двух вертикальных углов, образованных прямыми D и D', одинаково наклоненными к направлению δ;

b) всех несобственных точек, направление которых образует с δ угол, меньший угла, образованного с δ каждой из прямых D и D'.

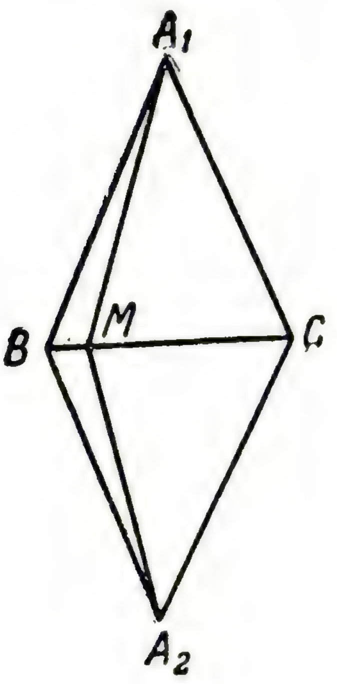

Рис. 3.

Множество G, как легко видеть, гомеоморфно внутренности параллелограмма A_1BA_2C (рис. 3): конечные точки отображаются внутрь A_1BC и A_2BC, а несобственные точки — на BC; A_1MA_2 есть образ прямой, проходящей через пересечение D и D' и параллельной направлению, определяю-

---

[1]) Здесь всюду, когда речь идет об угле между направлением Op и δ, имеется в виду угол между прямыми Op и δ, а не угол между векторами. *(Прим. ред.)*

щему несобственную точку, отображающуюся в M. Но внутренность параллелограмма, очевидно, гомеоморфна евклидовой плоскости. Следовательно, пространство H, названное нами проективной плоскостью, есть двумерное многообразие.

Покажем, наконец, что H есть *замкнутая неориентируемая поверхность*. Для этого рассмотрим прямолинейный треугольник ABC в плоскости конечных точек H и продолжим неограниченно его стороны (рис. 4). Тогда H разделится на четыре связные области, одна из которых (обозначим ее через I) есть внутренность треугольника ABC и единственная из четырех областей, не содержащая несобственных точек. Каждая из областей ограничена тремя прямыми, образующими треугольник в H. Несобственные точки, направление которых параллельно сторонам треугольника I, принадлежат одновременно двум из треугольников II, III, IV. Очевидно, что это разбиение H на треугольники удовлетворяет условиям 1° и 3° триангулируемости. Для того чтобы удовлетворялось также и условие 2°, достаточно разбить четыре треугольника на более мелкие так, чтобы вершина и противолежащая ей сторона любого треугольника T_i не принадлежали одновременно ни одному треугольнику, отличному от T_i. Итак, многообразие H является поверхностью, а так как число T_i конечно, то эта поверхность замкнута. С другой стороны, сразу видно, что при указанном расположении областей (см. рис. 4), например, прямая AB (включая несобственную точку, лежащую на этой прямой) образует одностороннюю простую замкнутую кривую на H и, значит, поверхность H неориентируема[1]).

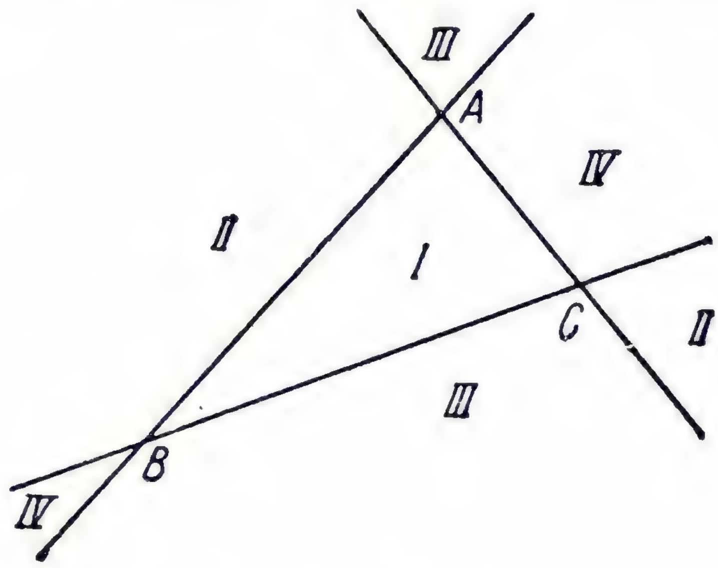

Рис. 4.

[1]) Можно построить поверхности, состоящие лишь из конечных точек и гомеоморфные проективной плоскости. Пусть E_4 — четырехмерное евклидово пространство, E_3 — многообразие, вложенное

3. Многообразие Прюфера. Мы только что имели возможность убедиться в том, что понятие ориентируемой поверхности является более узким по отношению к понятию поверхности. Теперь мы покажем, что не всякое двумерное многообразие триангулируемо, то есть что само понятие топологической поверхности является более узким, чем понятие двумерного многообразия. Для этого мы построим пример нетриангулируемого многообразия, принадлежащий Прюферу и опубликованный впервые Радо в работе, которую мы процитируем ниже.

Пусть W — множество элементов следующих двух видов:

1° Каждый элемент *первого рода* определяется тремя фиксированными действительными значениями трех переменных x, y и z, удовлетворяющими условиям

$$(x-z)^2+y^2\leqslant 1\quad (y>0).$$

2° Каждый элемент *второго рода* определяется двумя фиксированными действительными значениями переменных X и Y, удовлетворяющими единственному условию

$$Y>0.$$

Образуем из W топологическое пространство, точнее, двумерное многообразие, и затем покажем, что W нетриангулируемо.

Всякому действительному числу z_0 поставим в соответствие подмножество $B(z_0)$ из W, определенное следующим образом: $B(z_0)$ состоит из всех точек (элементов) первого рода из W, для которых $z=z_0$, и из всех точек второго рода из W. Таким образом, последние будут содержаться во всех $B(z)$, в то время как всякая

в E_4 и гомеоморфное трехмерному евклидову пространству. Рассмотрим в E_3 лист Мёбиуса M с границей C, и пусть P — точка из E_4, не принадлежащая E_3. Соединим точки C с P отрезками прямой. Множество этих отрезков и M образуют поверхность, гомеоморфную H. В самом деле, достаточно заметить, что одна из областей, определенных на H гиперболой, проходящей в плоскости рис. 4 (область, заключенная между ветвями гиперболы), гомеоморфна листу Мёбиуса, а дополнительная к ней область гомеоморфна кругу. Можно также построить в E_3 поверхность с линией самопересечения, гомеоморфную H.

точка первого рода будет принадлежать лишь одному множеству $B(z)$.

Между $B(z)$ и областью $\eta > 0$ евклидовой плоскости с координатами (ξ, η) установим следующее взаимно однозначное соответствие $T(z)$:

1° Всякой точке (x, y, z) первого рода из $B(z)$ отображение $T(z)$ ставит в соответствие точку

$$\xi = x, \ \eta = y,$$

то есть части множества $B(z)$, состоящей из точек первого рода, ставит в соответствие полукруг (C_z):

$$(\xi - z)^2 + \eta^2 \leqslant 1 \ (\eta > 0).$$

2° Если (X, Y) — точка второго рода, то рассмотрим в $\eta > 0$ полупрямую

$$\eta(X - z) - Y(\xi - z) = 0.$$

На этой полупрямой от точки ее пересечения с окружностью круга (C_z) вне этого круга отложим отрезок длины $\sqrt{(X - Z)^2 + Y^2}$. Конец этого отрезка и будет соответствовать точке (X, Y) при отображении $T(z)$.

Легко видеть, что точки, соответствующие точкам второго рода множества $B(z)$, покрывают всю часть полуплоскости $\eta > 0$, лежащую вне (C_z). Следовательно, множество всех образов точек из $B(z)$ покрывает полуплоскость $\eta > 0$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $P \in W$. Будем называть эту точку предельной для подмножества $E \subset W$, если хотя бы для одного $B(z)$, содержащего точку P, пусть это будет B_0, выполняются следующие условия:

1° $E \cdot B_0$ не пусто.

2° Если T_0 — отображение $T(z)$ множества B_0 на полуплоскость $\eta > 0$, H — множество, соответствующее при отображении T_0 множеству $E \cdot B_0$, и Q — точка, соответствующая точке P при отображении T_0 в $\eta > 0$, то точка Q есть предельная точка для H на этой полуплоскости в обычном смысле.

Если P есть точка первого рода, то B_0 для нее единственно. Если же P — второго рода, то, как легко

видеть, оба условия выполняются для любого $B(z)$, если они выполняются хотя бы для одного из них.

При этом определении предельных точек W будет топологическим пространством. Множества $B(z)$ открыты в W, и всякому множеству, открытому в области $\eta > 0$, соответствует при отображении $T(z)$ множество, открытое в $B(z)$, а значит, и в W. Тогда очевидно, что множества $B(z)$ гомеоморфны евклидовой плоскости, так как отображение $T(z)$ топологическое, а $\eta > 0$ гомеоморфна всей евклидовой плоскости. С другой стороны, W связно, так как от одной произвольной точки W к другой можно идти по непрерывной линии, лежащей на W: если обе точки лежат в одном $B(z)$, то это очевидно; если они первого рода и лежат в разных $B(z)$, то их можно соединить, пройдя через точки второго рода. Наконец ясно, что для любых двух точек из W в W существуют их непересекающиеся окрестности, то есть выполнена аксиома Хаусдорфа. Следовательно, пространство W есть двумерное многообразие: это *многообразие Прюфера.*

Покажем, что W *нетриангулируемо.* Для этого рассмотрим *все* множества $B(z)$ и в каждом из них зафиксируем точку $[x(z), y(z), z]$ первого рода. Множество A этих точек несчетно, так как все они различны, поскольку находятся в разных $B(z)$. Значит, если бы W было триангулируемым, то хотя бы в одном из треугольников содержалось бы бесконечное множество точек из A, а следовательно, и их предельная точка, так как треугольники компактны. Но по определению предельных точек в W множество A не может иметь таковых. Таким образом, многообразие Прюфера не является поверхностью в смысле данного выше определения.

4. Для того чтобы двумерное топологическое многообразие V было триангулируемо, необходимо и достаточно, *чтобы существовало счетное множество (или конечное число) открытых множеств G, гомеоморфных евклидовой плоскости и покрывающих V.*

Необходимость очевидна: для того чтобы убедиться в этом, достаточно к каждому треугольнику присоединить надлежащую окрестность его сторон; образующиеся таким образом G_i будут покрывать поверхность.

Для доказательства достаточности мы, следуя Радо[1]), заменим G_i жордановыми областями. Тогда выражение «покрывает V», как и в предыдущих главах, будет означать, что всякая точка V лежит *внутри* по крайней мере одной из жордановых областей.

Так как евклидову плоскость можно покрыть счетным множеством кругов, то каждая из G_i может быть покрыта счетным множеством жордановых областей, и, значит, то же самое будет иметь место и для V. Пусть D_i — жордановы области, покрывающие V. Сделаем так, чтобы границы любых двух областей D_i пересекались не более чем в конечном числе точек, заменяя в случае надобности области D_i другими областями Δ_i, снова покрывающими V. Заметим сразу же, что, как только будут получены все Δ_i, триангуляция V получится немедленно. В самом деле, положим

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \Delta_1, \\
\pi_2 &= \overline{\Delta_2 - \Delta_1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
\pi_n &= \overline{\Delta_n - \Delta_{n-1} - \dots - \Delta_1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Каждое множество π_i представляет собой конечную сумму многоугольников на V, то есть жордановых областей, граница которых состоит из конечного числа граничных дуг областей Δ_i. В сумме π_i составляют V и не имеют друг с другом общих внутренних точек. Каждое множество π_i легко разбить на треугольники на многообразии V таким образом, чтобы выполнялись условия триангуляции, сформулированные в п. 1. Остается, следовательно, определить жордановы области Δ_i.

Пусть

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1} \tag{1}$$

[1]) T. Radó, Über den Begriff der Riemannschen Fläche (Acta Szeged. т. 2, 1925, стр. 107). В этой работе автор доказывает, что всякое многообразие, допускающее в окрестности каждой точки локальное конформное отображение на плоскую область, есть ориентируемая поверхность. Ниже мы дадим другую характеристику ориентируемых поверхностей.

— такие жордановы области, что

$$\Delta_k \supset D_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

и границы областей (1) пересекаются друг с другом не более чем в конечном числе точек. Мы покажем, что можно заменить D_n на $\Delta_n \supset D_n$ так, чтобы n областей

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \tag{2}$$

обладали тем же свойством, что и (1). Тогда мы шаг за шагом будем заменять D_i областями Δ_i, удовлетворяющими требуемым условиям.

Пусть Γ — сумма границ областей (1). Назовем *нормальным* путем, связывающим две точки из V, любую простую дугу, соединяющую эти две точки и имеющую с Γ не более чем конечное число общих точек. Пусть C — граница D_n и $E = \Gamma C$. Если E состоит лишь из конечного числа точек, то можно взять $\Delta_n = D_n$. Если же E бесконечно, то множество его предельных точек можно заключить в конечное число неперекрывающихся простых дуг σ_h границы C. Заменим каждую дугу σ_h простой дугой σ_h', имеющей те же концы, что и σ_h, лежащей (кроме концов) в $V - D_n$ и составляющей нормальный путь, соединяющий эти концы. Дуги σ_h' всегда можно выбрать так, чтобы никакие две дуги σ_h' не имели в $V - D_n$ общих точек. Пусть d_h — жорданова область, лежащая в $V - D_n$ и ограниченная кривой

$$\sigma_h + \sigma_h'.$$

Полагая

$$\Delta_n = D_n + \sum_h d_h,$$

получим искомую последовательность. Итак, условие триангулируемости V достаточно, и наша теорема полностью доказана[1]).

[1]) Вероятно, теорема распространяется и на n-мерные многообразия, триангулируемость которых определяется аналогичным образом, но в общем виде такая теорема еще не доказана. [Для $n=3$ такую теорему доказал R. H. Bing, Ann. of Math., т. 69, 1959, стр. 37—65 *(Прим. ред.)*.]

III. Топологическая эквивалентность между римановыми и ориентируемыми поверхностями

Применим теперь предыдущие рассмотрения к многообразиям, определенным во II главе под названием римановых поверхностей.

1. Из теоремы, дающей необходимое и достаточное условие для триангулируемости двумерного многообразия, сразу следует, что любая риманова поверхность является *поверхностью* в смысле, принятом для этого выражения в начале настоящей главы. Таким образом, принятая ранее терминология, берущая свое начало от наглядности, оказалась оправданной a posteriori.

Действительно, то определение, которое мы дали для римановых поверхностей как накрывающих многообразий плоскости (z), предполагает существование множеств G_i, гомеоморфных евклидовой плоскости и покрывающих многообразие [1]. Значит, это многообразие триангулируемо, то есть является поверхностью.

2. *Любая риманова поверхность ориентируема.* Пусть S — топологическая модель римановой поверхности R и функция

$$z = f(p) \tag{1}$$

определяет соответствующую накрывающую плоскости (z) посредством S. Мы можем предположить, что триангуляция S осуществлена таким образом, чтобы в каждом треугольнике T_i триангуляции S отображение (1) было топологическим: в самом деле, для этого достаточно взять треугольники внутри δ_i (стр. 51) так, чтобы точки ветвления служили вершинами этих треугольников, и провести достаточно мелкое разбиение T_i. Покажем, что S, а значит и R, ориентируема.

Допустим, что это не так, и рассмотрим цикл треугольников на S, не сохраняющий ориентацию треугольника T_0. Каждому треугольнику T_i в (z) соответствует жорданова область D_i. Положительному

---

[1] Достаточно взять в качестве G внутренность δ_i (I, п. 2 предыдущей главы), чтобы убедиться в том, что топологическая модель римановой поверхности R триангулируема, а значит, триангулируема и R.

направлению обхода треугольника T_0 при отображении (1) соответствует положительное направление обхода D_0. Положительному направлению обхода, индуцированному треугольником T_0 в T_1, затем в T_2 и так далее, при отображении (1) соответствует положительное направление, индуцированное D_0 в D_1, затем в D_2 и так далее. Значит, если цикл треугольников, взятый на S, не сохраняет ориентацию треугольника T_0, то и ориентация D_0 не будет сохранена в цикле жордановых областей D_i. Но это невозможно, так как (z) — ориентируемая комплексная плоскость[1]). Следовательно, поверхность S ориентируема.

3. Триангулируемость и ориентируемость суть топологические свойства римановых поверхностей. Мы покажем, что этих свойств достаточно для топологической характеристики этих двумерных многообразий, то есть что *всякая ориентируемая поверхность гомеоморфна некоторой римановой поверхности.*

Именно мы покажем, что, какова бы ни была ориентируемая поверхность S, можно указать риманову поверхность, для которой S будет топологической моделью. Для этого мы определим непрерывное отображение (1) поверхности S в комплексную плоскость (z), осуществляющее риманово накрытие плоскости (z) при помощи S.

Докажем сначала лемму, которая понадобится нам в дальнейшем.

Лемма. *Жорданову область D, ограниченную кривой Γ, можно всегда топологически отобразить на себя так, чтобы на Γ это отображение совпадало с заданным топологическим отображением Γ на себя.*

Заметим прежде всего, что любые две жордановы области всегда могут быть топологически отображены одна на другую. В самом деле, они по определению гомеоморфны плоским жордановым областям, а по основной теореме теории конформных отображений две плоские открытые односвязные области можно конформно

[1]) На (z) ориентация любой жордановой области определяется, например, так, что при обходе области вдоль границы внутренность области остается всегда слева.

отобразить друг на друга. Такое отображение по известной теореме Каратеодори распространяется непрерывным образом на границы. Примененное к жордановым областям, оно установит между ними топологическое соответствие. Значит, достаточно доказать лемму для плоского круга K — топологического образа области D.

Заданному отображению Г на себя соответствует отображение (t) на себя окружности C круга K, и притом тоже топологическое.

Пусть a и a' — две точки из C, соответствующие друг другу при отображении t. Поставим в соответствие друг другу точки, равноотстоящие от центра круга K и лежащие на двух радиусах, проходящих через a и a'.

Заставляя точку a пробегать окружность C, получим, таким образом, в K искомое топологическое отображение. Лемма доказана.

Пусть теперь T_0 — треугольник на S и T_1 — треугольник, смежный[1]) с T_0. Пусть $(\mathfrak{C}_0)$ — топологическое соответствие между треугольником T_0 и треугольником t_0 плоскости (z), при котором вершинам T_0 соответствуют вершины t_0. Тогда отображение (1) в T_0 будет определяться как совпадающее с отображением $(\mathfrak{C}_0)$. Пусть t_1 — треугольник на плоскости (z), смежный с t_0.

Существует топологическое отображение $(\mathfrak{C}_1)$ треугольника T_1 на t_1, продолжающее $(\mathfrak{C}_0)$, то есть совпадающее с $(\mathfrak{C}_0)$ на общей стороне треугольников T_0 и T_1; оно, так же как и $(\mathfrak{C}_0)$, переводит эту общую сторону в общую сторону треугольников t_0 и t_1. Можно даже сделать так, чтобы это отображение вершинам треугольника T_1 ставило в соответствие вершины треугольника t_1. Все это следует непосредственно из доказанной леммы. В T_1 отображение (1) определяется как совпадающее с $(\mathfrak{C}_1)$.

Определим теперь отображение (1) при помощи продолжения уже построенных отображений на все треугольники T_i. Каждому T_i при отображении (1) будет

---

[1]) Смежными называются два треугольника, имеющие общую сторону.

соответствовать треугольник t_i на плоскости (z). Вообще говоря, некоторые точки из S будут при отображении (1) иметь одну и ту же проекцию на плоскости (z), то есть одни и те же области на (z) будут покрыты несколько раз. Но для любого цикла T_0, T_1, ..., T_0 на S никогда не будет двух различных образов одной и той же стороны T_0.

В самом деле, так как поверхность S ориентируема, то можно всегда отобразить T_i на t_i так, чтобы положительная ориентация на S соответствовала положительной ориентации на (z).

Теперь необходимо доказать, что отображение (1) определяет риманово накрытие плоскости (z) поверхностью S.

Пусть A — вершина T_i на S. Все треугольники T_i, имеющие A своей вершиной, располагаются вокруг нее в циклическом порядке. Их — конечное число, и они образуют замкнутую компактную область D на S. Все их образы при отображении (1) имеют в качестве вершины образ a точки A. Области $D \subset S$ отвечает область d накрывающего пространства $(z)_f^s$.

Проекция на (z) границы области d имеет минимум $\rho > 0$ расстояния от точки a. Рассмотрим множество точек области d, проекции которых отстоят от точки a на расстояние, меньшее или равное ρ. Они образуют замкнутую область γ пространства $(z)_f^s$, которой на S при отображении (1) соответствует замкнутая область $\Gamma \subset D$.

Способ построения отображения (1) показывает, что условие II риманова накрытия (гл. II, раздел I, п. 2) выполняется для Γ, как и для любой другой области на S, полученной аналогичным путем для других вершин треугольников T_i.

Точки поверхности S, не лежащие внутри одной из областей типа Γ, могут быть покрыты конечным или счетным множеством жордановых областей Γ', в каждой из которых отображение (1) будет топологическим. Следовательно, условие II выполняется для всех областей Γ и Γ'. Множество областей Γ и Γ' не более чем счетно и покрывает всю поверхность S, что озна-

чает выполнение условия I риманова накрытия. Итак, доказано, что поверхность $(z)_f^S$, определенная при помощи функции f из (1), построенной указанным нами способом, есть риманова поверхность.

4. Эта теорема[1]), в частности, показывает, что имеются римановы поверхности, топологический тип которых есть тор, замкнутая поверхность с n ручками (обобщенный тор) или любая открытая область одной из этих поверхностей. В следующей главе мы покажем, что класс различных типов римановых поверхностей гораздо более широк.

С другой стороны, очевидно, что даже простые из неориентируемых поверхностей, такие, как проективная плоскость или лист Мёбиуса, не могут служить топологическими моделями римановых поверхностей.

---

[1]) Очень простое доказательство возможности построения римановой накрывающей сферы при помощи любой ориентируемой поверхности было дано Морисом Хейнсом (M. Heins, Interior mapping of an orientable surface in to S^2, Proceedings of American Mathematical Society **2**, 1951, стр. 951). Из этого доказательства следует, что можно даже добиться того, чтобы все точки ветвления проектировались в три заданные точки сферической поверхности.

См. также Р. Неванлинна, Униформизация, Москва, 1955, стр. 102.

ГЛАВА IV

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТИПЫ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

I. Случай замкнутых поверхностей. Теорема Жордана

Замкнутые римановы поверхности играют в теории функций важную роль, а именно: они соответствуют алгебраическим функциям. Топологическое исследование таких поверхностей, как известно, позволяет выявить наиболее глубокие свойства этих функций.

1. Рассмотрим в плоскости ограниченную замкнутую область D, граница которой состоит из конечного числа n простых замкнутых кривых Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, не имеющих попарно общих точек[1]). Можно всегда осуществить топологическое отображение области D на фиксированную плоскую область D_0, ограниченную n непересекающимися окружностями C_i. Можно даже потребовать, чтобы соответствие (τ) между D и D_0 совпадало на границах с n произвольно заданными топологическими соответствиями (t_i) между Γ_i и C_i с одним ограничением — чтобы все эти соответствия или сохраняли направление обхода, или меняли его. Все это является почти непосредственным следствием леммы, доказанной на стр. 102.

В самом деле, соединим, как показано на рис. 5, все Γ_i и C_i внутри D и D_0 простыми непересекающимися дугами, и пусть λ_i — дуга, соединяющая Γ_i с Γ_{i+1},

---

[1]) Множества, не имеющие друг с другом общих точек, будем называть *непересекающимися*. Области D являются обобщением жордановых областей, которым соответствует случай $n = 1$.

а $\overset{0}{\lambda}_i$ — C_i с C_{i+1}. Множества

$$\Delta = D - \left[\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right]$$

и

$$\Delta_0 = D_0 - \left[\sum_{i=1}^{n} C_i + \sum_{i=1}^{n-1} \overset{0}{\lambda}_i\right]$$

будут открытыми жордановыми областями, если рассматривать каждую из дуг λ_i и $\overset{0}{\lambda}_i$ как двойную дугу, проходимую дважды в противоположных направлениях. Значит, на основании вышеупомянутой леммы между Δ и Δ_0 можно установить топологическое соответствие (τ), которое совпадало бы на границах с заданным отображением (t). Выберем (t) таким образом, чтобы двум совпадающим точкам на λ_i соответствовали две совпадающие точки на $\overset{0}{\lambda}_i$ и чтобы на Γ_i и C_i отображение (t) совпадало с (t_i). Чтобы это определение (t) не содержало никакого противоречия, мы заранее возьмем λ_i и $\overset{0}{\lambda}_i$ так, чтобы их концы на Γ_i и Γ_{i+1} и на C_i и C_{i+1} соответствовали друг другу при (t_i) и (t_{i+1}). Тогда соответствие (τ) будет удовлетворять всем поставленным условиям. Отсюда следует, что две области D рассматриваемого вида, *имеющие одинаковое число n контуров, гомеоморфны.*

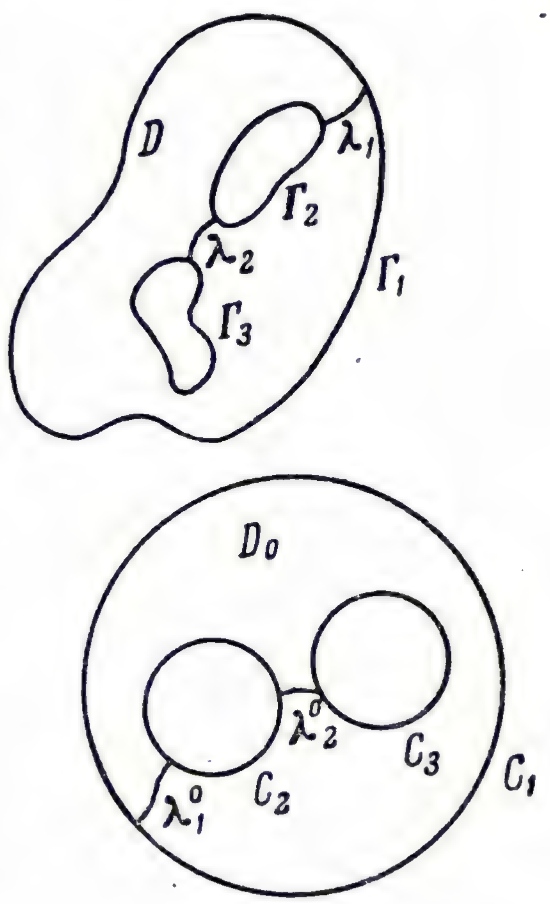

Рис. 5.

2. Полиэдрические области. Полиэдрической областью любой наперед заданной поверхности S будем называть всякое конечное множество треугольников одной и той же триангуляции S, образующее на S замкнутую область. Предыдущую область D можно рассматривать как полиэдрическую область на плоскости, так как ее всегда можно триангулировать так, чтобы Γ_i состояли из сторон триангуляции.

Полиэдрическая область P всегда имеет конечное число *контуров* (или краев) [1]). Эти контуры состоят из сторон треугольников, входящих в P, причем каждая такая сторона принадлежит лишь одному треугольнику из P. Контуры являются замкнутыми попарно не пересекающимися кривыми на S. Некоторые из контуров могут иметь кратные точки, но от этой особенности легко избавиться, изменив надлежащим образом триангуляцию в окрестностях кратных точек и расширив P в этих окрестностях. Число контуров полиэдрической области P при этой операции может увеличиться, но зато все они станут простыми.

Множество всех треугольников, принадлежащих триангуляции замкнутой поверхности, образует замкнутую полиэдрическую область (так называемую безграничную полиэдрическую область). В дальнейшем мы будем рассматривать полиэдрические области лишь на ориентируемых поверхностях.

Под *многоугольником* полиэдрической области P понимают простую замкнутую кривую, образованную сторонами треугольников из P. Многоугольник π *разбивает* P, если на P найдутся хотя бы две точки, которые нельзя соединить непрерывной линией, не пересекающей π.

Говорят, что многоугольники π_i, отличные друг от друга и от контуров, образуют *непересекающуюся* систему, если, изменяя бесконечно мало эти многоугольники, можно получить простые замкнутые кривые, не имеющие друг с другом общих точек и лежащие целиком внутри полиэдрической области.

Предположим, что на P существует g многоугольников π_i, которые образуют непересекающуюся систему и, взятые вместе, не разбивают P, а $g+1$ таких многоугольников уже не существует. Тогда говорят, что g есть *род* полиэдрической области P.

Род любой плоской полиэдрической области равен нулю. Это следует непосредственно из теоремы Жор-

---

[1]) Полиэдрические области часто называют *поверхностями с краями*. Мы избегаем этого выражения, которое могло бы привести к недоразумению: полиэдрическая область не является, вообще говоря, поверхностью в принятом здесь смысле.

дана о простых замкнутых кривых. В самом деле, согласно этой теореме такие кривые всегда разбивают плоскость. Тор есть полиэдрическая область рода 1, и вообще, обобщенный тор с k ручками есть безграничная полиэдрическая область рода k. Мы покажем, что такие полиэдрические области суть единственные топологические типы замкнутых римановых поверхностей.

3. *Всякая полиэдрическая область P рода* 0 *гомеоморфна некоторой плоской области D, число контуров которой совпадает с числом контуров P.*

Используем метод, который служил нам в предыдущей главе для доказательства того, что всякая ориентируемая поверхность гомеоморфна римановой поверхности. Дополнительное условие, которым мы располагаем, а именно тот факт, что род P равен нулю, позволяет нам показать, что получающаяся риманова поверхность однолистна.

Для того чтобы установить топологическое соответствие (τ) между P и D, рассмотрим треугольник T_0 из P и его топологический образ T_0' на плоскости (z). Отображение T_0 на T_0' можно, как и в предыдущей главе, продолжить на все треугольники T_i из P, смежные с T_0. Таким образом, будем отображать на плоскость (z) последовательно T_0, $T_0 + T_1 = P_1$, $T_0 + T_1 + T_2 = P_2$, ... до тех пор, пока не исчерпаем всю полиэдрическую область P. Я утверждаю, что это отображение можно осуществить так, чтобы все области T_0', $T_0' + T_1' = D_1$ $T_0' + T_1' + T_2' = D_2$, ... были простыми, то есть чтобы никакая из этих плоских областей не перекрывала сама себя.

Предположим, что отображение осуществлено так, чтобы не перекрывалась область D_k. Покажем, что его можно продолжить с соблюдением тех же условий. В самом деле, $P_{k+1} = P_k + T_{k+1}$, где T_{k+1} отделен от P_k контуром π полиэдрической области P_k, с которым T_{k+1} имеет общую сторону. Ввиду того, что род P равен нулю, T_{k+1} не может иметь с P_k никаких общих точек, кроме точек, лежащих на π, и, следовательно, его можно отобразить на треугольник T_{k+1}', лежащий *вне* D_k. Таким образом, область D_{k+1} не перекрывается и P можно

отобразить на простую область D. Тогда (τ) окажется гомеоморфизмом, ставящим в соответствие друг другу контуры P и D.

Если полиэдрическая область P является замкнутой поверхностью, то D займет всю плоскость (z); иными словами, P в этом случае гомеоморфна сфере.

4. Рассмотрим теперь полиэдрическую область P любого рода g, и пусть π_i ($i = 1, 2, \ldots, g$) — непересекающаяся система многоугольников, не разбивающих P. Пусть l — число контуров P.

Разрежем P вдоль g кривых π_i. Вместо каждой такой кривой получим два новых контура $\pi_{i,1}$ и $\pi_{i,2}$ полиэдрической области Q, полученной из P при разрезании. Значит, Q обладает $l + 2g$ контурами. С другой стороны, Q разбивается любым многоугольником, образованным из сторон ее треугольников и не совпадающим ни с одним из ее контуров, так как в противном случае род P был бы больше g.

Следовательно, род Q равен нулю и полиэдрическую область Q можно топологически отобразить на произвольно выбранную на плоскости область D с $l + 2g$ контурами.

Будем называть это отображение *каноническим*, если:

1° Область D комплексной плоскости (z) выбрана так, что точка $z = \infty$ лежит внутри D, а контурами D служат окружности.

2° $2g$ этих окружностей (C) образуют g пар окружностей, симметричных друг другу относительно действительной оси, а l остальных окружностей (Γ) имеют центры на той же оси.

3° Точки контуров $\pi_{i,1}$ и $\pi_{i,2}$, полученные из одной и той же точки многоугольника π_i, отображаются в симметричные точки симметричных окружностей (C), а контуры полиэдрической области P отображаются на окружности (Γ).

Рассуждение п. 1 показывает, что такое отображение всегда возможно, если контуры P простые.

Пусть теперь P' — некоторая другая полиэдрическая область с простыми контурами, того же рода и с таким же числом контуров, что и P. Тогда, применив лемму стр. 78, можно канонически отобразить P' на ту же

область D, установив тем самым топологическое соответствие между полиэдрическими областями P и P'. Отсюда заключаем, что *две полиэдрические области одного и того же рода и с одинаковым числом контуров гомеоморфны*. Эта теорема справедлива, в частности, и для $l = 0$, то есть в случае, когда полиэдрические области P и P' являются замкнутыми поверхностями. Она подводит нас вплотную к решению проблемы гомеоморфизма для замкнутых поверхностей.

5. *Родом (ориентируемой) поверхности* S назовем максимальное число g простых замкнутых непересекающихся кривых γ_i, которые можно провести на S, не разбивая ее. Ясно, что род есть топологический инвариант поверхности S. Две гомеоморфные поверхности должны иметь один и тот же род.

Если поверхность замкнута, то верно и обратное. В самом деле, заметим, что триангуляцию на S всегда можно произвести так, чтобы γ_i были многоугольниками [1]). Род полученной таким способом полиэдрической области P будет, очевидно, тем же, что и род S [2]). Благодаря результатам, полученным в предыдущем пункте, мы можем теперь сформулировать следующую теорему:

Для того чтобы две ориентируемые замкнутые поверхности были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковый род.

Эта теорема доказана Жорданом в 1866 г. [3]). Она показывает, что с топологической точки зрения род замкнутой ориентируемой поверхности вполне определяет саму поверхность. Следовательно, все топологические типы замкнутых римановых поверхностей исчерпываются

---

[1]) В предположении, что число γ_i конечно, то есть что род S конечен. Но S можно рассматривать как полиэдрическую область и отобразить канонически на D. На таком образе S при помощи очень простых рассуждений сразу видно, что число γ_i может быть только конечным.

[2]) Два пересекающихся многоугольника, имеющие общие вершины или стороны, всегда могут быть слегка деформированы так, чтобы вместо них на S получились две простые замкнутые кривые без общих точек, причем число кривых, разбивающих S, при этой деформации не увеличивается.

[3]) Journal de Mathématiques pures et appliquées, т. XI, 2-я серия, 1866, стр. 105.

сферой, тором и вообще обобщенным тором с g ручками. Эти типы поверхностей являются нормальными формами всех замкнутых ориентируемых поверхностей. Их можно заменить плоскими каноническими образами, в которых симметричные точки симметричных окружностей (C) рассматриваются как одна точка.

II. Граничные элементы открытых поверхностей и аппроксимирующие полиэдрические области

Определение рода распространяется и на открытые поверхности, но этот инвариант недостаточен для их полной топологической характеристики, и потому для описания таких поверхностей необходимо предварительно ввести новые понятия.

1. Граничный элемент поверхности. Рассмотрим на открытой поверхности S последовательность замкнутых областей Δ_i($i = 0, 1, 2, \ldots$), удовлетворяющих следующим условиям:

1° Каждая область Δ_i имеет в качестве границы единственную простую замкнутую кривую γ_i, лежащую на S.

2° Для любого i

$$\Delta_{i+1} \subset \Delta_i.$$

3° Пересечение всех Δ_i пусто.

Последнее условие показывает, что области Δ_i *некомпактны* в S, ибо в противном случае нашлась бы хоть одна точка на S, принадлежащая всем Δ_i.

По определению всякой последовательности областей Δ_i, удовлетворяющих трем поставленным условиям, соответствует *граничный элемент* поверхности S, для которого Δ_i образуют *определяющую последовательность*.

Несколько ниже мы покажем, что для любой открытой поверхности существуют определяющие последовательности, а значит, и граничные элементы. Прежде всего определим, что следует понимать под эквивалентными последовательностями: две определяющие последовательности (Δ_i) и (Δ'_i) одной и той же поверхности называются *эквивалентными*, если любому натурально-

му числу n соответствует такое натуральное число ν, что

$$\Delta'_{\nu} \subset \Delta_n, \tag{1}$$

и такое натуральное число μ, что

$$\Delta_{\mu} \subset \Delta'_n. \tag{2}$$

Заметим сразу же, что одно из включений (1) или (2) влечет за собой другое. В самом деле, предположим, что выполняется (1). Так как последовательность (Δ_i) удовлетворяет условию 3°, то Δ_{μ} для достаточно больших μ не содержит ни одной точки границы области Δ'_n; значит, Δ_{μ} лежит либо целиком вне Δ'_n, либо целиком внутри. Но Δ_{μ} не может лежать вне Δ'_n, так как в силу (1) Δ_{μ} при достаточно больших i содержит все Δ'_i, а они удовлетворяют условию 2°.

Отсюда следует, что для Δ_{μ} должно выполняться включение (2).

По определению две эквивалентные последовательности определяют один и тот же граничный элемент.

Введенные здесь понятия определяющей последовательности и эквивалентности являются топологическими инвариантами: определяющей последовательности на S при топологическом отображении S на S' соответствует определяющая последовательность на S'. Двум эквивалентным последовательностям на S соответствуют две эквивалентные последовательности на S'. Легко видеть также, что всякое топологическое отображение друг на друга двух поверхностей ставит во взаимно однозначное соответствие граничные элементы этих поверхностей.

Чтобы увидеть на примере смысл этих определений, достаточно рассмотреть плоскую открытую область G и ее границу F. Множество F состоит, вообще говоря, из континуумов (отличных от точки) и отдельных точек, не принадлежащих никакому из этих континуумов. Каждый из континуумов или точек F и будет граничным элементом области G, определенным при помощи эквивалентных между собой последовательностей (Δ_i).

2. Аппроксимирующая полиэдрическая область поверхности S. Пусть T_i — треугольники заданной триангуляции поверхности S. Построим из этих треугольников *аппроксимирующие полиэдрические области поверхности* S, образующие последовательность

$$P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots, \tag{3}$$

подчиненную следующим условиям:

1° Для любого n

$$P_n \subset P_{n+1}.$$

2° $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i = S.$

3° Ни для какого P_n из последовательности (3) на S не существует ни одной кривой вне P_n, соединяющей два различных контура P_n.

Следствием этого последнего условия является тот факт, что число открытых областей, составляющих открытое множество $S - P_n$, равно числу контуров P_n, то есть каждая из областей имеет своей границей один из этих контуров.

Рассмотрим треугольник T_0 и все треугольники, имеющие с ним общую вершину или общую сторону. Эти треугольники (включая T_0) образуют полиэдрическую область Q, которую мы в случае надобности изменим так, чтобы ее контуры были простыми (см. стр. 108). Если Q удовлетворяет условию 3°, то мы возьмем ее в качестве P_0. В противном случае рассмотрим цепь треугольников T_i, лежащую вне Q и соединяющую один из контуров Q с другим [1]). Полиэдрическая область Q вместе с этой цепью образует полиэдрическую область Q' с меньшим, чем у Q, числом контуров. В самом деле, два контура из Q и края соединяющей их цепи треугольников образуют вместе один контур. Таким образом, два контура из Q заменены одним контуром в Q' и к другим контурам из Q не прибавилось ни одного нового. Если Q' не удовлетворяет условию 3°, то, продолжая эту операцию на Q', снизим снова число ее контуров на еди-

---

[1]) В случае надобности мы снова изменим триангуляцию S в окрестности кривой, соединяющей контуры, так, чтобы такая цепь существовала.

ницу и так далее. В результате конечного числа операций получим полиэдрическую область, которая либо удовлетворяет условию 3°, имея несколько контуров, либо имеет всего один контур. Полученную таким образом полиэдрическую область примем за P_0. Обозначив через Γ_h некоторый контур полиэдрической области P_0, рассмотрим все треугольники, имеющие с Γ_h общую вершину или сторону. Множество таких треугольников образует вместе с P_0 полиэдрическую область Q_h, с которой мы поступим точно так же, как с Q. Таким образом получим полиэдрические области P_1^h, имеющие с P_0 общими лишь многоугольники Γ_h [1]) и обладающие свойством 3°. Положим

$$P_1 = P_0 + \sum_h P_1^h.$$

Тогда полиэдрическая область P_1 будет удовлетворять условиям 1° и 3°. Продолжая этот процесс, получим последовательность (3), удовлетворяющую всем трем поставленным условиям, так как очевидно, что множество треугольников T_i исчерпается в силу связности S.

3. Построив последовательность (3), рассмотрим открытое множество

$$G_0 = S - P_0.$$

Это множество состоит из ν открытых областей без общих точек, каждая из которых имеет в качестве границы один контур из P_0. Пусть

$$G_0^0,\ G_0^1,\ G_0^2,\ \ldots,\ G_0^\nu \tag{4}$$

— эти компоненты G_0. Так как поверхность S открыта, то последовательность (3) не может состоять лишь из конечного числа членов; значит, в последовательности (4) найдется по крайней мере один член, пусть это будет G_0^0, содержащий точки из всех $G_m = S - P_m$, где $m > 0$. Пусть

$$G_1^0,\ G_1^1,\ \ldots,\ G_1^{\nu_1} \tag{5}$$

[1]) В самом деле, так как Γ_h разбивают S, то треугольники будут отделены от P_0 посредством Γ_h.

— компоненты G_1, заключенные в G_0^0. Хотя бы один член из (5), пусть G_1^0, содержит точки из всех G_m при $m > 1$. Продолжая неограниченно этот процесс, получим бесконечную последовательность

$$G_0^0,\ G_1^0,\ G_2^0,\ \ldots,\ G_n^0,\ \ldots \tag{6}$$

открытых областей, каждая из которых имеет своей границей в S многоугольник триангуляции (контур из P_i) и содержится в предыдущей. Эти области не имеют ни одной точки, общей им всем, так как каждая точка из S лежит внутри некоторой P_i, а области (6) составляют часть дополнения этих P_i. Следовательно, замыкания

$$\overline{G_i^0}$$

областей G_i^0 удовлетворяют трем условиям п. 1 и, значит, образуют определяющую последовательность на S. Итак, на любой открытой поверхности S существует по крайней мере одна определяющая последовательность, или, другими словами, *всякая открытая поверхность обладает хотя бы одним граничным элементом* [1]).

4. Из вышеизложенного следует, что всякий граничный элемент может быть получен при помощи определяющей последовательности, построенной с помощью последовательности аппроксимирующих полиэдрических областей. В самом деле, пусть

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n,\ \ldots \tag{7}$$

— любая определяющая последовательность элемента α. Нужно построить последовательность, аналогичную последовательности (G_i^0) и эквивалентную (7). Для этого достаточно показать, что всякой области Δ_n из последовательности (7) соответствует некоторая компонента H_{ν_n} множества $G_{\nu_n} = S - P_{\nu_n}$, где ν_n неограниченно возрастает вместе с n, так что

$$H_{\nu_0},\ H_{\nu_1},\ H_{\nu_2},\ \ldots,\ H_{\nu_n},\ \ldots$$

---

[1]) Замкнутая поверхность не имеет граничных элементов, так как на такой поверхности условие 3° п. 1 неосуществимо из-за ее компактности.

есть определяющая последовательность и всегда

$$H_{\nu_n} \subset \Delta_n.$$

Возьмем такое достаточно большое число ν_0, чтобы P_{ν_0} покрывала всю границу Δ_0 в S. Так как Δ_0 некомпактна в S, а P_{ν_0} компактна, то $\Delta_0 \not\subset P_{\nu_0}$ и, значит, в Δ_0 найдутся точки из G_{ν_0}, то есть в Δ_0 содержится по крайней мере одна компонента области G_{ν_0}. Пусть $H^0_{\nu_0}, H^1_{\nu_0}, H^2_{\nu_0}, \ldots, H^p_{\nu_0}$ — все компоненты G_{ν_0}, лежащие внутри Δ_0. Хотя бы одна из них, пусть это будет H_{ν_0}, содержит точки из всех Δ_n, где $n > 0$. Рассуждение, аналогичное проведенному в замечании к п. 1, показывает, что существует такая область Δ_m с номером $m > 0$, что

$$\Delta_m \subset H_{\nu_0}.$$

Для Δ_m можно повторить то, что было сказано относительно Δ_0. Таким образом получим компоненту H_{ν_m} из G_{ν_m} такую, что

$$H_{\nu_m} \subset \Delta_m. \tag{8}$$

Для индексов i, заключенных между 0 и m, положим

$$\nu_i = \nu_m.$$

Тогда включение (8) будет *тем более* справедливо для этих Δ_i. Продолжим этот процесс, определяя $m' > m$ так, чтобы

$$\Delta_{m'} \subset H_{\nu_m},$$

и поступая с $\Delta_{m'}$ точно так же, как с Δ_m. В результате получим последовательность

$$H_{\nu_0},\ H_{\nu_1},\ \ldots,\ H_{\nu_m},\ H_{\nu_{m+1}},\ \ldots,\ H_{\nu_n},\ \ldots,$$

удовлетворяющую поставленным условиям. Таким образом, последовательность

$$(\overline{H}_{\nu_i})$$

будет определяющей последовательностью, эквивалентной (Δ_i). Этот результат показывает, какую важную роль играют аппроксимирующие полиэдрические области: они позволяют строить для любой поверхности

нормальные определяющие последовательности для граничных элементов.

5. Множество граничных элементов. Пусть α — граничный элемент поверхности S. Множество элементов α (которое не является множеством точек S) будет играть в дальнейшем важную роль. Ясно, что множества (α) и (α') граничных элементов двух гомеоморфных поверхностей S и S' могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие. Теперь мы уточним, когда такое соответствие может рассматриваться как гомеоморфизм между множествами самих граничных элементов.

Будем говорить, что последовательность граничных элементов

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \tag{9}$$

определяющими последовательностями которых являются соответственно

$$(\Delta_i^1), (\Delta_i^2), \ldots, (\Delta_i^n), \ldots,$$

сходится к граничному элементу α с определяющей последовательностью (Δ_i), если для любого p найдется такое q, что при $n > q$

$$\Delta_i^n \subset \Delta_p,$$

за исключением не более чем конечного числа значений i, зависящего от n.

Очевидно, это определение не изменится от замены фигурирующих в нем определяющих последовательностей на эквивалентные. Число q зависит лишь от p и от последовательности (9). Если взаимно однозначное соответствие между (α) и (α') таково, что всякой последовательности (9), сходящейся к α, соответствует последовательность элементов

$$\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n', \ldots$$

из (α'), сходящаяся к элементу α', соответствующему α, и обратно, то говорят, что это соответствие есть гомеоморфизм между (α) и (α'), а сами множества гомеоморфны.

6. Классификация граничных элементов. Граничный элемент α поверхности S с определяющей последовательностью (Δ_i) будем называть элементом *первого рода*, если для достаточно больших n внутренность Δ_i образует поверхность рода нуль.

Среди поверхностей конечного рода поверхности рода нуль играют особенно важную роль в теории функций. Их называют также поверхностями, *подобными однолистным*. Это выражение заимствовано у Фату[1]). Так как поверхность, подобная однолистным, не теряет этого качества при любом топологическом отображении, то очевидно, что определение граничных элементов первого рода не зависит от такого отображения. С другой стороны, ясно, что всякая поверхность, составляющая часть поверхности, подобной однолистным, сама подобна однолистным, и, таким образом, определение не зависит также и от выбора определяющей последовательности элемента α среди всех эквивалентных последовательностей.

Поверхность S конечного рода обладает лишь граничными элементами первого рода. Это легко показать, рассмотрев аппроксимирующие полиэдрические области. Один из элементов непременно будет иметь тот же род, что и S, а значит, и все следующие полиэдрические области тоже. Следовательно, компоненты $S - P_n$ для достаточно больших n будут поверхностями, подобными однолистным. Всякий граничный элемент, не являющийся элементом первого рода, называется элементом *второго рода.*

7. Пусть S и S' — две гомеоморфные поверхности. Ясно, что всякое топологическое соответствие между ними устанавливает гомеоморфизм между множествами (α) и (α') граничных элементов S и S'. Более того, подмножество множества (α), состоящее из элементов первого рода, при этом гомеоморфизме соответствует аналогичному подмножеству из (α'). Следовательно, для того чтобы две поверхности были гомеоморфны, необходимо, чтобы их граничные элементы первого и второго

---

[1]) P. Fatou, цитируемая выше работа. Это выражение равносильно немецкому «schlichtartig».

рода соответствовали друг другу в гомеоморфизме между (α) и (α'). Если поверхности конечного рода, то это условие сводится в силу вышесказанного к гомеоморфизму между (α) и (α'). Только в этом случае необходимо, кроме того, чтобы поверхности были одинакового рода (это условие неявно выполняется для двух поверхностей бесконечного рода).

Теперь наша цель будет состоять в том, чтобы показать, что эти условия также и достаточны. Общая теорема, которую мы здесь докажем, была установлена впервые Керекьярто [1]). Бо́льшая часть понятий, введенных в предыдущем разделе, принадлежит этому автору, которому мы следовали с незначительными изменениями.

III. Проблема гомеоморфизма для открытых поверхностей

1. Начнем с доказательства двух лемм.

Первая лемма. *Пусть A и B — ограниченные множества на плоскости, A' и B' — их производные множества. Если*

$$A \cdot A' = 0 \text{ и } B \cdot B' = 0$$

и между A' и B' существует топологическое соответствие (t), то его можно продолжить на $\bar{A}$ и $\bar{B}$, то есть между двумя замыканиями существует топологическое соответствие (T), совпадающее на множествах A' и B' с (t).

Заметим сразу же, что условие леммы содержит в себе предположение о том, что A и B счетны, состоят из изолированных точек и что множества A' и B' бесконечны.

---

[1]) B. de Kerekjarto, Vorlesungen über Topologie, Berlin, 1923, стр. 170. Теорема Керекьярто была сформулирована и доказана им для ориентируемых и неориентируемых поверхностей. В последнем случае вводятся граничные элементы третьего рода, которые нас здесь не интересуют. Частный случай проблемы был решен независимо Саксом; см. Saks, Fundamenta Mathematicae, т. V, 1924, стр. 288, а также de Possel, Comptes rendus, т. 188, 1929, стр. 1589.

Мы можем предположить, что каждое из множеств A и B заключено в некотором квадрате на плоскости. Для удобства эти квадраты возьмем равными. Каждый из них разобьем на четыре равных квадрата прямыми, параллельными его сторонам, и обозначим эти новые квадраты через a_i и b_i. Всякий квадрат a_i (или b_i), для которого множество a_iA (или b_iB) будет бесконечным, назовем *главным квадратом*. В каждом из них выберем соответственно предельную точку множества a_iA (или b_iB), которую назовем главной точкой квадрата. Преобразование (t) этим точкам ставит в соответствие другие точки, каждая из которых будет предельной точкой в одном, двух или четырех квадратах b_i (или a_i). Присоединим их, как главные, к тем, что уже были выбраны в этих квадратах. Таким образом, каждый главный квадрат a_i и b_i будет обладать хотя бы одной главной точкой и эти точки будут соответствовать друг другу при отображении (t).

Определим теперь первое промежуточное соответствие (T_1) между $\bar{A}$ и $\bar{B}$ следующим образом:

1° Для A' и B' полагаем $(T_1) \equiv (t)$.

2° Точкам из A, не лежащим в главном квадрате, поставим произвольным образом во взаимно однозначное соответствие такое же число (которое, очевидно, *конечно*) точек из B и то же самое сделаем для аналогичных точек из B.

3° Для остальных точек множеств A и B отображение (T_1) определим так: в A, равно как и в B, каждую точку, не связанную еще соответствием, заданным условием 2°, объединим с одной из главных точек квадрата (или одного из квадратов), которому она принадлежит. Будем производить это присоединение к главным точкам таким образом, чтобы с каждой главной точкой было объединено бесконечное множество точек. Это всегда возможно, так как главные точки являются предельными точками множеств a_iA и b_iB и только конечное число точек из этих множеств уже связано соответствием 2°. Для того чтобы завершить определение (T_1), поставим во взаимно однозначное соответствие те точки из A и B, которые объединены с двумя главными точками, соответствующими друг другу при отображении (t).

Отображение (T_1), вообще говоря, не будет непрерывным на $\bar{A}$ и $\bar{B}$, но оно является лишь первым приближением искомого соответствия.

Разобьем теперь каждый из квадратов a_i и b_i на четыре равных квадрата a_{ij} и b_{ij}, которые мы назовем квадратами *второго порядка*. В каждом главном квадрате второго порядка, не содержащем уже выбранных главных точек, выберем по указанному выше принципу новые главные точки, которые вместе с предыдущими образуют систему, аналогичную первой. При помощи этих квадратов второго порядка и их главных точек определим второе промежуточное соответствие (T_2) следующим образом:

1° Для A' и B' положим $(T_2) \equiv (T_1) \equiv (t)$.

2° В точках множеств A и B, не лежащих в главных квадратах второго порядка, снова положим

$$(T_2) \equiv (T_1).$$

3° Для остальных точек множеств A и B определяем (T_2) точно так же, как было выше определено (T_1), заменив лишь квадраты a_i и b_i квадратами второго порядка. В самом деле, точек, связанных между собой соответствием, исходящим из 2°, будет снова конечное число, и можно опять устроить объединение с главными точками аналогично предыдущему.

Продолжив неограниченно этот процесс, мы определим таким образом после (T_1) и (T_2) последовательно соответствия $(T_3), \ldots, (T_n), \ldots$ Соответствия, полученные на n-м шаге исходя из условия 2°, будут *окончательными*: в самом деле, последующие операции будут оставлять их без изменений. *Рангом* точки M из A или из B назовем индекс n соответствия (T_n), связавшего M окончательным соответствием при помощи условия 2°. Для $h < n$ в каждом (T_h) точка M объединена с некоторой главной точкой P квадрата порядка h, к которому она относится. То же самое можно сказать и относительно точки, соответствующей M при отображении (T_h), которая объединена с точкой, соответствующей P.

Так как любая точка M имеет конечный ранг, то всякая точка будет связана окончательным соответствием, и полученное таким образом окончательное со-

ответствие (T) между A и B, очевидно, взаимно однозначно. Остается показать, что оно является непрерывным продолжением соответствия (t).

Пусть P — точка из A' и Q — ее образ в B' при отображении (t). Так как (t) непрерывно в P, то любому ε можно поставить в соответствие такое $h(\varepsilon)$, что если P' — точка из A', а Q' — соответствующая ей точка из B', то неравенство

$$|P-P'| < h(\varepsilon)$$

(где $|P-P'|$ означает расстояние между точками P и P') влечет за собой

$$|Q-Q'| < \varepsilon. \tag{1}$$

Так как P принадлежит A', то существует квадрат сколь угодно высокого порядка, в котором P будет предельной точкой для соответствующей части множества A. Пусть Ω — квадрат, удовлетворяющий этому условию и имеющий столь высокий порядок, чтобы его сторона была меньше наименьшего из двух чисел

$$\frac{h(\varepsilon)}{2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Пусть k — порядок Ω. В надлежащей окрестности ν точки P все точки из A будут иметь ранг, больший k. Пусть p — точка из νA и $k'>k$ — ее ранг. В соответствии $(T_{k'-1})$ точка p объединяется с главной точкой P_0 в квадрате порядка $k'-1$. Так как

$$k'-1 \geqslant k,$$

то сторона этого квадрата меньше, чем $\varepsilon/\sqrt{2}$, и, значит,

$$|p-P_0| < \varepsilon.$$

Точно так же, если q и Q_0 означают точки, соответствующие p и P_0 при отображении (T), то при $(T_{k'-1})$ будем иметь

$$|q-Q_0| < \varepsilon. \tag{2}$$

Но точки P и P_0 либо обе лежат в Ω, либо в двух соседних квадратах порядка k, если ν выбрано надлежащим образом. Следовательно, имеем

$$|P-P_0| < h(\varepsilon),$$

и, значит, согласно (1)

$$|Q-Q_0|<\varepsilon. \tag{3}$$

Тогда неравенства (2) и (3) дают

$$|Q-q|<2\varepsilon. \tag{4}$$

Следовательно, если p лежит в некоторой окрестности точки P, то имеет место неравенство (4).

Для B рассуждение проводится так же, как и для A. Значит, соответствие (T) есть гомеоморфизм между $\bar{A}$ и $\bar{B}$, совпадающий на A' и B' с отображением (t), и лемма доказана.

2. Вторая лемма. *Если в двух плоскостях R и R' заданы ограниченные, замкнутые, всюду разрывные множества F и F' и топологическое соответствие (t) между F и F', то можно продолжить (t) непрерывным образом в топологическое отображение (T) плоскости R на плоскость R', ставящее в соответствие друг другу бесконечно удаленные точки двух плоскостей и совпадающее на F и F' с отображением (t).*

Вокруг каждой точки множества F как центра опишем круг фиксированного радиуса ρ и выберем (на основании классической леммы Бореля — Лебега) среди них конечное число кругов, покрывающих F. Эти круги образуют конечное множество непересекающихся жордановых областей γ_k, покрывающих F таким образом, что всякая точка из γ_k находится от F на расстоянии, не превышающем ρ. Пусть $F_k=\gamma_k F$ и F'_k — образ F_k при отображении (t). Тогда расстояние между любыми двумя F'_k имеет положительный минимум. Обозначим через ρ_1 некоторое положительное число, меньшее этого минимума и меньшее ρ. Множества F'_k можно заключить в области δ'_h, аналогичные γ_k, заменив ρ на ρ_1. Прообразы множеств $\delta'_h F'_k$ при отображении (t) будут лежать внутри γ_k. Каждый из этих прообразов можно снова заключить в единственную жорданову область δ_h внутри соответствующей γ_k так, чтобы δ_h не пересекались. Области δ_h и δ'_h соответствуют друг другу, так что порции множеств F и F', которые в них содержатся, переходят друг в друга при отображении (t). Более того,

расстояние ни одной из точек этих областей соответственно до множеств F и F' не превышает ρ.

Если мы повторим ту же операцию в каждой δ_h, заменяя F и F' на $\delta_h F$ и $\delta'_h F'$ и ρ на $\rho/2$, то получим области $\delta_{h_i} \subset \delta_h$ и $\delta'_{h_i} \subset \delta'_h$, соответствующие друг другу[1]) и содержащие порции множеств F и F', переходящие друг в друга при отображении (t). Максимальное расстояние точек, принадлежащих этим областям, соответственно до F и до F' будет меньше $\rho/2$. Неограниченно продолжая этот процесс, получим, беря $\rho/3, \ldots$, области

$$\delta_h, \ \delta_{h_i}, \ \delta_{h_{ij}}, \ \ldots, \tag{5}$$

образующие определяющие последовательности для точек из F, и аналогичные области

$$\delta'_h, \ \delta'_{h_i}, \ \delta'_{h_{ij}}, \ \ldots \tag{5'}$$

для точек из F'.

Теперь легко построить (T). Начнем с топологического отображения друг на друга двух замкнутых областей

$$D_1 = \overline{R - \sum_h \delta_h} \ \text{ и } \ D'_1 = \overline{R' - \sum_h \delta'_h},$$

контурами которых служат границы δ_h и δ'_h. А так как их конечное число, то и число контуров в D_1 и D'_1 тоже конечно. Значит, можно сделать так, чтобы при этом отображении бесконечно удаленные точки соответствовали друг другу, а контур δ_h переходил в контур δ'_h с тем же индексом.

Отображение, переводящее D_1 в D'_1, может быть распространено на области

$$D_2 = \overline{R - \sum_{h,\, i} \delta_{h_i}} \ \text{ и } \ D'_2 = \overline{R' - \sum_{h,\, i} \delta'_{h_i}}$$

так, чтобы контуры δ_{h_i} и δ'_{h_i} с совпадающими индексами соответствовали друг другу, и в результате неогра-

---

[1]) Соответствующие области мы будем снабжать одним и тем же индексом i.

ниченного повторения процесса мы придем к открытым областям

$$R - F \text{ и } R' - F'.$$

Полученное таким образом отображение (τ) ставит в соответствие между собой внутренние точки областей δ и δ' с одинаковыми индексами. С другой стороны, точки множеств F и F', определяемые последовательностями (5) и (5′) с одинаковыми индексами, соответствуют друг другу при отображении (t). Значит, отображение (τ) есть непрерывное продолжение отображения (t), и мы можем положить

$$(T) \equiv (\tau)$$

в дополнениях множеств F и F'.

Заметим, что эта лемма представляет собой частный случай теоремы, которую мы хотим доказать, случай, когда вместо двух поверхностей взяты две плоские области. Теперь мы проведем доказательство для общего случая.

3. Итак, рассмотрим две поверхности S и S' и предположим, что: 1) S и S' одинакового рода; 2) множества (α) и (α') граничных элементов гомеоморфны и

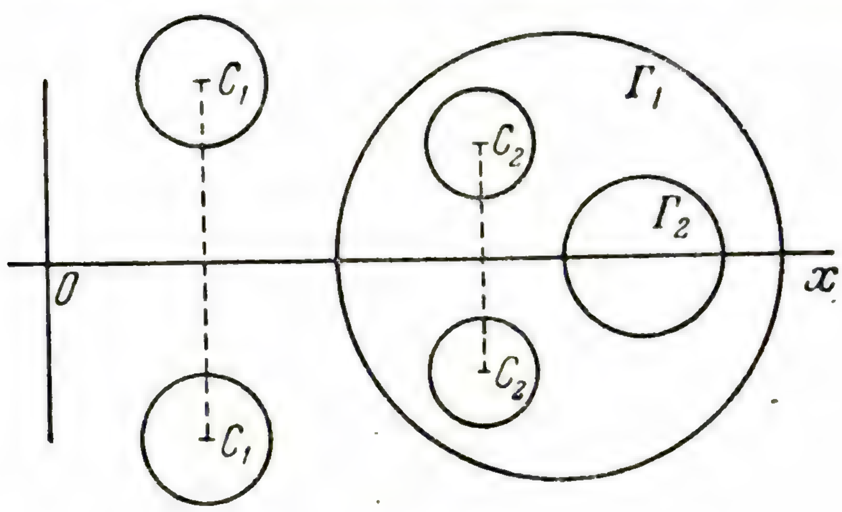

Рис. 6.

при этом гомеоморфизме имеется взаимное соответствие между множествами элементов первого рода и множествами элементов второго рода. Докажем, что в таком случае S и S' гомеоморфны.

Рассмотрим аппроксимирующие полиэдрические области P_n поверхности S и отобразим их канонически на

комплексную плоскость (z) в смысле определения, данного на стр. 110. Значит, для того чтобы отобразить полиэдрическую область P_1, рода g_1 с l_1 контурами, мы возьмем $2g_1$ окружностей (C_1), симметричных друг другу относительно действительной оси Ox плоскости (z) и l_1 окружностей (Γ_1) с центрами на этой оси, и причем так, чтобы все эти окружности лежали одна вне другой. В соответствии с изложенным на стр. 110 отобразим P_1 на область D_1, определяемую этими окружностями, так, чтобы симметричным точкам окружностей (C_1) всегда соответствовала одна и та же точка из P_1, а контуры P_1 отображались на (Γ_1). Каждому контуру P_1 (а значит, и каждой окружности (Γ_1)) соответствует область поверхности S, которую можно рассматривать как член нормальной определяющей последовательности (см. II, п. 4) граничного элемента поверхности S. Каждая из этих областей будет отображена на (z) внутрь соответствующего круга Γ_1, если продолжить отображение полиэдрической области P_1 внутрь окружностей (Γ_1) следующим образом: каждая компонента множества $\overline{P_2 - P_1}$, состоящего из l_1 полиэдрических областей, имеющих общий контур с P_1, канонически отображается внутрь соответствующего круга Γ_1. Значит, мы берем внутри этого круга некоторое число (равное двойному роду этой компоненты) окружностей (C_2), симметричных друг другу относительно оси Ox, и некоторое число (равное числу ее контуров) окружностей (Γ_2) с центрами на Ox. Затем склеиваем, как это делается во всех аналогичных случаях, отображения P_1 и $\overline{P_2 - P_1}$ вдоль окружностей (Γ_1). Тогда полиэдрическая область P_2 будет канонически отображена на замкнутую область D_2 плоскости (z), лежащую вне всех кругов (C_1), (C_2) и (Γ_2). Продолжим этот процесс неограниченно для P_3, P_4, ..., P_n, ..., заботясь о том, чтобы радиусы (Γ_n) стремились к нулю вместе с $\frac{1}{n}$[1]. Всякая последовательность кругов Γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, каждый из которых содержится в предыдущих, определяет точку, и притом только одну,

[1]) Круги C_n и Γ_n для любого n будут браться один вне другого.

на оси Ox. Множество F этих точек замкнуто и ограничено. Указанная операция приводит к каноническому отображению поверхности S на часть

$$\lim_{n\to\infty} D_n = D = \overline{\left[(z) - \sum (C)\right]} - F$$

плоскости (z), где сумма распространяется на все круги C_n для всех значений n. Обозначим это отображение через (H); две симметричные точки окружностей (C) при отображении (H) представляют одну-единственную точку поверхности S; в остальном же отображение (H) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками D и S.

Всякому граничному элементу поверхности S соответствует точка из F, и обратно. В самом деле, всякой нормальной определяющей последовательности некоторого граничного элемента соответствует последовательность Γ_i, определяющая точку из F, а именно последовательность кругов Γ_n, внутрь которых при отображении (H) переходят области нормальной последовательности. Отсюда сразу же получаем, что это соответствие есть гомеоморфизм между множеством α граничных элементов поверхности S и множеством F.

Обозначим через ω центры кругов C. Точки множества F, соответствующие элементам α первого рода, не будут предельными для множества (ω). Обозначим эту часть множества F через F_1. Тогда все точки множества $F - F_1 = F_2$ будут предельными для множества (ω) и будут соответствовать элементам α второго рода. Все это вытекает из способа построения соответствия (H).

Отобразим теперь S' на комплексную плоскость (z') точно так же, как мы отобразили S на (z). Предположим сначала, что род S и S' бесконечен. По условию теоремы между (α) и (α') существует гомеоморфизм, ставящий в соответствие между собой элементы первого рода обоих множеств. Следовательно, отображения (H) и (H') поверхностей S и S' [1]) устанавливают топологическое соответствие между F и F', ставящее в соответ-

[1]) Буквами со штрихом мы будем обозначать различные понятия для S', аналогичные понятиям, относящимся к S.

ствие множество F_1 множеству F_1', а множество F_2 — множеству F_2'. Но F_2 и F_2' являются соответственно производными множествами для множеств (ω) и (ω') изолированных точек. Следовательно, первая лемма позволяет распространить соответствие с F_2 и F_2' на (ω) и (ω') без нарушения непрерывности. Таким образом, мы получим топологическое соответствие между $F+(\omega)$ и $F'+(\omega')$. Эти множества замкнуты, ограничены и всюду разрывны; значит, вторая лемма позволяет распространить его на комплексные плоскости (z) и (z'). Теперь остается лишь изменить это соответствие так, чтобы окружности (C) с соответствующими друг другу центрами отображались одна в другую с переходом симметричных точек в симметричные. Это не представляет никакой трудности, такую задачу мы решали уже много раз. Таким образом, канонические образы поверхностей S и S' при отображениях (H) и (H') топологически соответствуют друг другу, и, следовательно, S и S' гомеоморфны.

Предположим теперь, что S и S' — поверхности конечного и одинакового рода. Тогда множеств F_2 и F_2' не существует, а множества (ω) и (ω') конечны и состоят из одинакового числа точек. Лемма II снова позволяет распространить соответствие между $F+(\omega)$ и $F'+(\omega')$ на плоскости (z) и (z'), и те же рассуждения показывают, что S и S' гомеоморфны.

В итоге можно сформулировать следующую теорему, доказанную Керекьярто:

Для того чтобы две открытые ориентируемые поверхности S и S' были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковый род и чтобы множества граничных элементов первого рода соответствовали друг другу в гомеоморфизме множеств (α) *и* (α').

Если род конечен, то граничных элементов второго рода не существует, и тогда достаточно гомеоморфизма множеств (α) и (α') и равенства родов.

4. Каноническое представление поверхности S позволяет построить нормальные формы (аналогичные обобщенным торам в случае замкнутых поверхностей) для всех топологических типов открытых римановых

поверхностей. Достаточно осуществить наложение нижней полуплоскости на верхнюю полуплоскость и раздвинуть два листа, полученные после склеивания их вдоль окружностей (C).

Кёбе указал очень простой способ для получения всех топологических типов ориентируемых поверхностей[1]). Рассмотрим следующие три типа полиэдрических областей:

1) обычный тор, из которого удалена внутренность двух непересекающихся жордановых областей;

2) сферу, из которой удалена внутренность трех непересекающихся жордановых областей;

3) плоскую жорданову область.

Всякая ориентируемая поверхность получается путем последовательного склеивания конечного или бесконечного числа полиэдрических областей этих трех типов вдоль их краев, которые изменяют так, чтобы они могли совпадать. Если полученная таким образом фигура имеет один или несколько краев, то, отбросив соответствующие им жордановы кривые, всегда получим поверхность в смысле принятого здесь определения.

Таким образом, мы определили все топологические типы, которые возможны для римановых поверхностей[2]).

---

1) См. Керекьярто, цитируемая выше работа, стр. 173. Для неориентируемых поверхностей достаточно присоединить четвертый тип неориентируемых полиэдрических областей.

2) Множество различных типов имеет мощность континуума. За доказательством этого факта мы отсылаем к книге Керекьярто.

ГЛАВА V

ВНУТРЕННИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

I. Основные топологические свойства аналитических функций

До сих пор нас интересовали лишь топологические свойства римановых поверхностей. Теперь же мы будем рассматривать топологические факты, которые встречаются при изучении самих аналитических функций.

1. Пусть задано отображение

$$y = f(x) \tag{1}$$

пространства X в пространство Y. Будем говорить, что отображение (1) *топологически эквивалентно* отображению

$$y' = \varphi(x')$$

пространства X' в пространство Y', если существуют такие два топологических отображения T и H пространств X и Y соответственно на X' и Y', что

$$\varphi(x') \equiv H[f[T^{-1}(x')]].$$

Всякое свойство отображения (1), общее всем отображениям, топологически эквивалентным (1), называется *топологическим свойством отображения* (1).

Это определение применимо, в частности, и к аналитическим функциям: пространством X в этом случае служит риманова поверхность функции, а пространством Y — сфера Римана (или комплексная плоскость), на

которой находятся значения функции. Значит, отображения, топологически эквивалентные тем, которые определяются аналитическими функциями, являются непрерывными отображениями самых общих ориентируемых поверхностей в замкнутую ориентируемую поверхность рода нуль. Наша задача теперь состоит в том, чтобы топологически охарактеризовать эти отображения, а через них — сами аналитические функции.

2. Первое топологическое свойство аналитических функций: инвариантность открытого множества. Согласно основной теореме Брауэра всякое топологическое отображение одного многообразия в другое многообразие той же размерности переводит открытое множество в открытое. Но это свойство принадлежит и более общим отображениям, и в том числе, как известно, аналитическим функциям, рассматриваемым как отображения их римановой поверхности в сферу. Тогда теорема Брауэра сразу показывает, что это свойство является топологическим. С этой точки зрения оно является основным свойством аналитических функций. Доказательство его весьма элементарно и может быть проведено на нескольких строках.

Благодаря простым заменам переменных, позволяющим всякий кратный круг на римановой поверхности преобразовать в простой круг на плоскости, а бесконечно удаленную точку заменить точкой на конечном расстоянии, достаточно показать, что если функция

$$w = f(z) \tag{2}$$

голоморфна в круге γ с центром $z = 0$, то отображение (2) переводит γ, как бы мал он ни был, в множество плоскости (w), для которого точка $w_0 = f(0)$ будет внутренней.

Радиус γ всегда можно выбрать так, чтобы на γ выполнялось условие

$$f(z) - w_0 \neq 0.$$

Когда z описывает окружность γ, w описывает замкнутую кривую, не проходящую через w_0, и аргумент выражения $w - w_0$ увеличивается на $2\pi\nu \neq 0$, так как если ν — порядок нуля $z = 0$ для функции $f(z) - w_0$, то

$\nu \geqslant 1$. Но если ρ достаточно мало, то для любых значений w_0' функции w, удовлетворяющих неравенству

$$|w_0' - w_0| < \rho,$$

аргумент выражения $w - w_0$ увеличивается тоже на $2\pi\nu$ [1]). Следовательно, все точки $w = w_0'$ будут принадлежать образу круга γ, а $w = w_0$ будет лежать внутри этого образа.

3. Из инвариантности открытого множества получаем в качестве прямого следствия классические свойства аналитических функций.

Пусть

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases} \tag{3}$$

— непрерывное отображение открытой области δ плоскости (x, y) в плоскость (u, v), переводящее открытые множества в открытые. Тогда образом области δ будет открытая область d плоскости (u, v).

Пусть функция $\Phi(u, v)$ определена и непрерывна в d и не имеет максимума ни в одной из точек d. Тогда

$$\varphi(x, y) \equiv \Phi[u(x, y), v(x, y)]$$

не имеет максимума ни в одной точке области δ. Действительно, если бы существовала такая точка (x_0, y_0), то в окрестности этой точки выполнялось бы неравенство

$$\varphi(x_0, y_0) \geqslant \varphi(x, y),$$

что после применения к этой окрестности формулы (3) означает

$$\Phi(u_0, v_0) \geqslant \Phi(u, v).$$

Но так как отображение (3) оставляет инвариантными открытые множества, то образом этой окрестности является окрестность точки (u_0, v_0). Следовательно,

[1]) В самом деле, ν целое, а приращение аргумента должно изменяться непрерывно с изменением w_0' в круге $|w_0' - w_0| < \rho$.

последнее соотношение содержит в себе существование максимума в точке (u_0, v_0) для функции $\Phi(u, v)$[1]).

Очевидно, что в нашем утверждении можно максимум заменить на минимум. Таким образом,

1) полагая $\Phi = \sqrt{u^2 + v}$ (эта функция не имеет максимума во внутренних точках), получаем теорему о максимуме модуля для аналитических функций;

2) полагая $\Phi = u$ (эта функция не имеет ни максимума, ни минимума), получаем аналогичную теорему для гармонических функций.

4. Всякое отображение, топологически эквивалентное аналитической функции, обладает свойством инвариантности открытых множеств, которое мы сейчас рассмотрели, но этого свойства недостаточно для полной характеристики класса таких отображений. Построим пример отображения, оставляющего инвариантными открытые множества и, однако, не эквивалентного топологически никакой аналитической функции.

Рассмотрим для $y \neq 0$ в полуплоскости $x > 0$ две функции:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= e^{-\frac{1}{y^2}} + xy^2, \\ \theta &= \frac{2\pi}{y}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Они определяют непрерывное отображение полуплоскости $x > 0$ в плоскость с полярными координатами (ρ, θ), если условиться для $y = 0$ брать $\rho = 0$. Ясно, что это отображение не эквивалентно никакой аналитической функции, так как вся полупрямая $y = 0$ переходит при нем в единственную точку $\rho = 0$. Докажем, что (4) оставляет инвариантными открытые множества на всей полуплоскости $x > 0$.

Для любой области из $x > 0$, не имеющей общих точек с осью Ox, это следует сразу из классической теоремы о неявных функциях и теоремы Брауэра. Значит, остается показать, что это верно и для областей, пересекаемых осью Ox.

---

[1]) Здесь мы имели в виду максимум в *широком смысле*. Теорема остается *тем более* верной для максимума в *узком смысле*.

Пусть $x_0 > 0$ — абсцисса некоторой фиксированной точки на прямой $y=0$. Построим квадрат с центром в точке x_0 и со сторонами, параллельными координатным осям, длиной 2ε (ε возьмем столь малым, чтобы квадрат целиком лежал в полуплоскости $x > 0$). Пусть $0 < y_0 < \varepsilon$. Когда x пробегает отрезок, заключенный между точками с координатами $(x_0 - \varepsilon, y_0)$ и $(x_0 + \varepsilon, y_0)$, точка (ρ, θ) пробегает на радиусе-векторе $\theta_0 = \frac{2\pi}{y_0}$ отрезок

$$e^{-\frac{1}{y_0^2}} + (x_0 - \varepsilon)\, y_0^2 \leqslant \rho \leqslant e^{-\frac{1}{y_0^2}} + (x_0 + \varepsilon)\, y_0^2.$$

Положим

$$y_n = \frac{2\pi}{\theta_0 + 2\pi n},$$

где n — натуральные числа. Числа y_n образуют убывающую последовательность, стремящуюся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$ и такую, что

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + y_n}. \tag{5}$$

Совокупность образов отрезков с концами $(x_0 - \varepsilon, y_n)$ и $(x_0 + \varepsilon, y_n)$ при $n \to \infty$ покрывает интервал I полупрямой $\theta = \theta_0$ с концом $\rho = 0$. В самом деле, при достаточно большом n

$$e^{-\frac{1}{y_n^2}} + (x_0 - \varepsilon)\, y_n^2 < e^{-\frac{1}{y_{n+1}^2}} + (x_0 + \varepsilon)\, y_{n+1}^2, \tag{6}$$

что легко проверить, разделив (6) на y_n^2 и учитывая соотношение (5).

Возьмем такое достаточно большое $n = N$, чтобы выполнялось (6), и пусть Ω — множество общих точек квадрата и полосы

$$0 \leqslant y \leqslant y_N.$$

Покажем, что образ множества Ω при отображении (4) будет содержать внутри точку $\rho = 0$. В самом деле, пусть число y'_N заключено между y_N и y_{N+1}. При помощи

(5) можно, исходя из y'_N, определить убывающую последовательность положительных чисел $y'_n (n \geqslant N)$, стремящихся к нулю одновременно с $\frac{1}{n}$ и таких, что

$$y_{n+1} < y'_n < y_n.$$

Все отрезки, вырезанные квадратом из прямых $y = y'_n$, будут иметь свои образы на радиусе-векторе $\theta = \frac{2\pi}{y'_N}$, и множество этих образов составляет интервал, полностью аналогичный интервалу I на соответствующей полупрямой. Когда y'_N изменяется от y_N до y_{N+1}, полупрямая делает полный оборот вокруг начала координат. Значит, образ множества Ω, содержащий начало координат, содержит и круг с центром в этой точке. Следовательно, точка $\rho = 0$ лежит внутри образа множества Ω.

Но Ω является частью квадрата, поэтому образ квадрата *тем более* содержит внутри начало координат, а так как ε — произвольное положительное число, то отображение (4) сохраняет открытые множества во всей области $x > 0$.

5. Второе топологическое свойство аналитических функций: инвариантность компактного континуума. Построенный пример привлекает наше внимание к другому топологическому свойству аналитических функций: никакой отличный от точки континуум не может быть отображен в единственную точку. Так как, с другой стороны, всякий компактный континуум[1]) может иметь своим образом при непрерывном отображении либо континуум того же рода, либо единственную точку, то настоящее свойство сводится к инвариантности отличного от точки компактного континуума.

6. Внутреннее отображение. Два топологических свойства аналитических функций, рассмотренные в предыдущих параграфах, являются основными. Ниже мы по-

---

[1]) Некомпактный континуум может иметь образ, не являющийся ни континуумом, ни единственной точкой. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе бесконечный путь, определяющий конечное асимптотическое значение целой функции.

кажем, что этих свойств вполне достаточно для полной характеристики класса отображений, топологически эквивалентных аналитическим функциям. Таким образом, любое другое топологическое свойство этих функций будет их следствием.

Внутренним отображением одного двумерного топологического многообразия V на другое двумерное многообразие W или на его часть назовем всякое непрерывное отображение V в W, которое:

1) любое открытое множество многообразия V переводит в открытое множество многообразия W;

2) никакой отличный от точки континуум многообразия V не отображает в единственную точку многообразия W.

Всякое топологическое отображение есть внутреннее отображение. С другой стороны, любая аналитическая функция осуществляет внутреннее отображение.

Два последовательно осуществленных внутренних отображения определяют внутреннее отображение. Наша цель теперь — доказать, что суперпозицией аналитических функций и топологических отображений можно получить любое внутреннее отображение.

II. Локальное обращение внутренних отображений

1. Локальными свойствами отображений являются свойства, касающиеся лишь окрестности точки и природы отображения в этой окрестности. Очевидно, что они не зависят от топологического типа многообразия в силу самого определения понятия многообразия. Следовательно, при локальном изучении внутренних отображений двумерных многообразий можно ограничиться случаем, когда оба многообразия V и W являются евклидовыми плоскостями.

Итак, рассмотрим внутреннее отображение

$$P = I(p) \tag{1}$$

плоскости (p) точек p в плоскость (P) точек P. Прежде всего дадим некоторые определения и сделаем несколько замечаний, вытекающих почти сразу же из определения отображения (1).

2. Пусть A — точка из (P), a — такая точка из (p), что $A = I(a)$, D — открытая область без внутренней границы, содержащая A, и Δ — ее замыкание. Рассмотрим множество всех точек p, которые можно соединить с a непрерывной линией так, чтобы ее образ при отображении (1) целиком лежал в D. Это множество образует открытую область плоскости (p). Замыкание (Δ, a) этой области есть замкнутая область; мы назовем ее *максимальной областью для* Δ *относительно точки* a.

Образ области (Δ, a) всегда содержится в Δ, но может не заполнять всей Δ. Если p лежит внутри (Δ, a), точка P, полученная при помощи (1), лежит внутри Δ; если же p лежит на границе (Δ, a), то P лежит на границе Δ.

Нормальной областью плоскости (p) для отображения (1) назовем всякую замкнутую и компактную[1]) в (p) область δ, все граничные точки которой при отображении (1) переходят в граничные точки области $I(\delta)$. Последняя замкнута и компактна в (P). Если обозначить ее через Δ, а через a обозначить любую точку внутри δ, то, пользуясь введенным выше обозначением, можно записать

$$\delta = (\Delta, a).$$

Обратно, если максимальная область (Δ, a) заданной области Δ замкнута и компактна в (p), то она нормальна.

В самом деле, тогда ее образ замкнут и компактен в (P). В силу определения (Δ, a) он занимает всю область Δ, и для (Δ, a) выполняются условия нормальности.

Легко показать, что:

1° Если δ — нормальная область и $\Delta = I(\delta)$, a — точка внутри δ, Δ' — замкнутая область в Δ, содержащая $A = I(a)$, то область (Δ', a) нормальна.

2° Две любые максимальные области одной и той же области Δ либо совсем не имеют общих внутренних точек, либо совпадают.

---

[1]) Так как (p) — евклидова плоскость, то вместо *компактности* можно говорить об *ограниченности*.

3° В любой окрестности точки a можно всегда определить нормальную область, содержащую точку a внутри.

Утверждения 1° и 2° вытекают сразу из определения максимальных областей. Для построения нормальной области, удовлетворяющей условию 3°, достаточно взять в окрестности точки a простую замкнутую кривую γ, окружающую a и не содержащую ни одной точки p, для которой $I(p) = I(a)$. Множество точек p, удовлетворяющих этому равенству, в силу условия II внутренних отображений будет всюду разрывным. Следовательно, классическое свойство этих множеств показывает, что нужную кривую γ провести всегда можно. Тогда пусть $\rho > 0$ будет минимумом расстояния от $I(\gamma)$ до $A = I(a)$. Если область Δ выбрать в круге с центром в A и радиусом ρ, то область (Δ, a) будет нормальной, так как она лежит внутри кривой γ и, значит, замкнута и компактна.

3. Теперь мы докажем две леммы, которые будут играть в дальнейшем важную роль. Вот первая из этих лемм:

Если δ — нормальная область отображения (1) *и* $\Delta = I(\delta)$, *то любой простой дуге Σ, лежащей вместе со своими концами A и B внутри Δ, и всякой точке $a \in \delta$ такой, что $I(a) = A$, соответствует простая дуга σ, выходящая из a и лежащая вместе со своими концами внутри δ и такая, что $I(\sigma) = \Sigma$ и на σ отображение* (1) *топологическое.*

Пусть $[0, 1]$ — отрезок, на котором изменяется параметр t, определяющий положение точки на Σ. Заключим каждую из 2^n дуг, определенных на Σ точками, соответствующими $t = \frac{i}{2^n}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$, внутрь замкнутой области Δ_n^i так, чтобы: 1) каждая $\Delta_n^i \subset \Delta$; 2) две области Δ_n^i, индексы i которых отличаются друг от друга больше, чем на единицу, не имели общих точек. Этим двум условиям легко удовлетворить, заставив пробегать по кривой Σ центр круга достаточно малого фиксированного радиуса ρ_n, зависящего от n. Кроме того, числа ρ_n мы выберем так, чтобы: 3) $\Delta_{n+1}^i \subset \Delta_n^i$, если дуга, заключенная в Δ_{n+1}^i, является частью дуги,

заключенной в Δ_n^i, и 4) когда $n\to\infty$, $\rho_n\to 0$. Это последнее условие введено для того, чтобы множество областей [1] Δ_n^i для одного и того же n (покрывающее Σ) стремилось к этой дуге, когда $n\to\infty$.

Цепи (Δ_n^i) мы поставим в соответствие в δ цепь областей δ_n^i таких, чтобы для любого i область δ_n^i была максимальной областью для Δ_n^i. Для этого построим сначала область (Δ_n^1, a), которую примем за δ_n^1. Так как эта область нормальна (поскольку она лежит в δ) [2], то ее образ занимает всю область Δ_n^1. Следовательно, в δ_n^1 найдется по крайней мере одна точка a_1 такая, что $I(a_1) = A_1$, где через A_1 обозначена точка дуги Σ, соответствующая $t=\frac{1}{2^n}$. Множество (a_1) всех точек a_1, удовлетворяющих этим условиям, замкнуто и компактно. Окружим каждую из этих точек кругом γ столь малого радиуса, чтобы область $I(\gamma)$ находилась внутри Δ_n^2, что возможно, так как A_1 лежит внутри этой области и отображение (1) непрерывно. На основании леммы Бореля — Лебега можно выбрать конечное число кругов γ, покрывающих (a_1). Тогда условие 2° предыдущего пункта показывает, что областей (Δ_n^2, a_1), где a_1 — любая точка из (a_1), будет конечное число: в самом деле, в силу этого условия две такие области, полученные для точек a_1, лежащих внутри одного и того же выбранного γ, совпадают. В качестве области δ_n^2 возьмем любую из областей (Δ_n^2, a_1).

С каждым δ_n^2 проделаем то же самое, что и с δ_n^1, заменив точку A_1 точкой A_2, соответствующей $t=\frac{2}{2^n}$. Таким образом получим конечное число цепей (δ_n^i), каждая из которых обладает указанными выше свойствами. Число n будем называть *рангом* цепей (δ_n^i).

Пусть m — любое натуральное число. Цепь (Δ_{n+m}^i) (где $i = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n+m}$) заключена внутри цепи (Δ_n^i)

[1]) Такое множество мы назовем *цепью* (Δ_n^i).

[2]) См. условие 1° предыдущего пункта.

(где $i = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$) таким образом, что ее первые 2^m областей содержатся в первой области Δ_n^1 цепи (Δ_n^i); 2^m следующих областей (где $i = 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1}$) заключены в Δ_n^2 и так далее, каждая Δ_n^i содержит 2^m областей цепи (Δ_{n+m}^i).

Если r — любое натуральное число, меньшее m, то цепь (Δ_{n+r}^i) заключена (как мы только что показали) в цепи (Δ_n^i) и содержит цепь (Δ_{n+m}^i). Точно так же любая цепь (δ_{n+m}^i) всегда содержится в некоторой цепи (δ_n^i), а с другой стороны, для любого $r < m$ всегда существует цепь (δ_{n+r}^i), содержащая первую и содержащаяся во второй.

После этого мы можем утверждать, что среди цепей (δ_1^i) существует по крайней мере одна цепь, содержащая цепи всех рангов, так как число цепей (δ_1^i) конечно. Выберем цепь 1-го ранга, удовлетворяющую этому условию. Среди содержащихся в ней цепей (δ_2^i) выберем одну из тех, которые содержат цепи всех рангов. Этот выбор мы можем продолжать бесконечно, так как существуют цепи сколь угодно высокого ранга, и таким образом придем к последовательности цепей

$$(\delta_1^i), \ (\delta_2^i), \ \ldots, \ (\delta_n^i), \ \ldots, \tag{2}$$

каждая из которых заключена во всех предыдущих и содержит все последующие цепи в указанном выше смысле.

Множества последовательности (2) суть ограниченные континуумы, вложенные друг в друга. Пересечением σ этих континуумов является, как известно, либо отличный от точки континуум, либо единственная точка. Но множество σ должно содержать по крайней мере одну точку p_0 такую, что

$$P_0 = I(p_0), \tag{3}$$

где P_0 — произвольная фиксированная точка на Σ, поскольку всякое множество из последовательности (2) содержит точку, удовлетворяющую этому условию. Если в каждом множестве выбрать такую точку, то любая

предельная точка для этих выбранных точек будет удовлетворять условию (3) и содержаться в σ. Значит, σ — континуум, отличный от точки. Так как, с другой стороны, цепи (Δ_n^i) стремятся к Σ при $n \to \infty$, то $I(\sigma) \subset \Sigma$ и, таким образом, $I(\sigma) = \Sigma$. Остается, следовательно, показать, что соответствие (1) между σ и Σ взаимно однозначно, так как в этом случае, в силу своей непрерывности от σ к Σ и компактности σ, оно будет топологическим на σ.

Пусть p_1 и p_2 — две различные точки на σ, удовлетворяющие условию

$$I(p_1) = I(p_2) = P.$$

Так как две области Δ_n^i для одного и того же n имеют общие точки только для i, отличающихся друг от друга не более чем на единицу, то области δ_n^i, содержащие p_1 и p_2, будут либо соседними, либо совпадающими. Значит, они всегда образуют континуум c_n, и множества последовательности

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

вложены одно в другое точно так же, как множества последовательности (2). Пересечением множеств c_n является континуум c, так как он должен содержать p_1 и p_2, которые, по предположению, различны. Но $I(c)$ может быть лишь точкой P, так как $I(c_n)$ не имеют, кроме P, других общих точек. Это противоречит условию II внутренних отображений, и, значит, лемма полностью доказана.

4. Докажем теперь вторую лемму, дополняющую предыдущий результат:

Во всякой области δ найдется лишь конечное число дуг σ, удовлетворяющих условиям первой леммы.

Прежде всего заметим, что две различные дуги σ, пусть σ_1 и σ_2, выходящие из точки a и имеющие вторую общую точку a', должны совпадать между a и a'. Действительно, в противном случае часть дуги σ_1 и часть дуги σ_2 образуют простую замкнутую кривую, определяющую в плоскости ограниченную жорданову область d. Тогда образ $I(d)$ должен быть замкнутой огра-

ниченной областью, имеющей своей границей часть Σ. Но очевидно, что это невозможно, так как Σ — простая дуга.

Следовательно, если имеется бесконечное число различных σ, пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, то их концы $b_1, b_2, \ldots$, соответствующие B, все должны быть различными. Так как b_i лежат в области δ[1]), которая замкнута и компактна, то они имеют в δ предельную точку b_0, для которой, как и для всякой точки b_i, выполняется соотношение

$$I(b_0) = B.$$

Значит, точка b_0 лежит внутри δ, так как δ нормальна, а B, по предположению, лежит внутри Δ. Продолжим Σ при помощи дуги Σ' с концами B и B' внутри Δ так, чтобы $\Sigma + \Sigma'$ была простой дугой. Согласно предыдущей лемме каждому b_i соответствует простая дуга σ_i', которая посредством (1) топологически отображается на Σ'. Тогда, рассуждая для $\Sigma + \Sigma'$ точно так же, как выше для Σ, получаем, что никакие две дуги σ_i' не имеют друг с другом общих точек, так как все b_i различны. В частности, концы b_i' дуг σ_i', соответствующие точке B', тоже будут все различны, и на том же основании, что и выше, они будут иметь предельную точку такую, что

$$I(b_0') = B'$$

и b_0' лежит внутри δ.

Вокруг точек b_0 и b_0' как центров опишем круги радиусом, меньшим такой величины $\varepsilon > 0$, чтобы эти круги лежали внутри δ. Существуют две дуги σ_i', пусть это будут σ_1' и σ_2', имеющие концы b_1 и b_2 в круге с центром b_0, а концы b_1' и b_2' — в круге с центром b_0'. Точки b_1 и b_2, так же как и b_1' и b_2', можно соединить друг с другом простыми дугами α и α', лежащими в соответствующих кругах. Множество $(\sigma_1' + \sigma_2' + \alpha + \alpha')$ или его часть есть

[1]) В самом деле, ни одна из σ_i не может иметь точки вне δ, так как все образы граничных точек области δ лежат на границе Λ, то есть вне Σ.

простая замкнутая кривая, определяющая жорданову область d. Следовательно, множество $I(d)$ есть ограниченная замкнутая область, все граничные точки которой принадлежат множеству

$$\Sigma' + I(\alpha) + I(\alpha'). \tag{4}$$

Но ε можно взять сколь угодно малым, и, значит, множества $I(\alpha)$ и $I(\alpha')$ могут лежать в любых заданных окрестностях точек B и B'. Тогда множество (4) не может содержать всей границы области $I(d)$, так как эта граница должна непременно содержать точки, лежащие вне окрестностей точек B и B', и так как, с другой стороны, $I(d)$ ограничена. Итак, противоречие, к которому мы пришли, показывает, что дуг σ_i конечное число, что и требовалось доказать.

5. Прежде чем приступить к теореме, которую мы хотим доказать, дадим одно важное приложение этих лемм, которое почти сразу вытекает из них:

Если A — любая заданная точка плоскости (P), то множество (a) точек, удовлетворяющих равенству

$$I(a) = A,$$

состоит из изолированных точек.

Множество (a) замкнуто, так как отображение $I(p)$ непрерывно. Значит, доказательство утверждения сводится к тому, чтобы показать, что это множество не имеет в плоскости (p) ни одной предельной точки.

Предположим, что это не так, и пусть a_0 — предельная точка множества (a). Заключим a_0 в нормальную область δ (это всегда возможно в силу условия 3° п. 2), и пусть $\Delta = I(\delta)$. Точка $A = I(a_0)$ лежит внутри Δ. Следовательно, внутри Δ можно взять простую дугу Σ с концами A и B. В δ имеется бесконечное число точек из (a). В соответствии с леммой п. 3 построим дуги σ, каждая из которых выходит из некоторой точки $a \in (a)$ и лежит внутри δ. На основании второй леммы каждая из этих дуг σ может иметь общие точки лишь с конечным числом других дуг σ, так как все они имеют различные концы $a \in (a)$. Пусть σ_1 — одна из этих дуг. Найдется бесконечное число дуг σ, не имеющих с σ_1 общих точек; пусть σ_2 — одна из них. Имеется беско-

нечное число дуг σ, не имеющих общих точек ни с σ_1, ни с σ_2; пусть σ_3 — одна из них. Этот процесс можно продолжать неограниченно, выбирая каждый раз новую дугу σ, не имеющую общих точек ни с одной из предыдущих, и таким образом получить последовательность дуг

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots,$$

каждая из которых имеет своим образом Σ и не имеет общих точек ни с какой другой дугой из этой последовательности. Тогда при помощи рассуждений предыдущего пункта мы придем к противоречию. Следовательно, в δ имеется лишь конечное число точек a и предельная точка a_0 не может существовать.

Теперь мы углубим этот результат, доказав теорему о локальном обращении внутренних отображений.

6. Теорема об обращении. Из результата предыдущего пункта следует, что если a — фиксированная точка плоскости (p), то в (p) найдется такая окрестность U точки a, что единственной точкой этой окрестности, имеющей своим образом точку $A = I(a)$, является сама точка a. Пусть δ — нормальная область, лежащая в U и содержащая внутри точку a. Пусть, с другой стороны, Γ — круг с центром в точке A, лежащий внутри $\Delta = I(\delta)$, и B — точка на окружности C круга Γ. В силу вышеизложенного в δ существует лишь конечное число точек b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ таких, что

$$I(b_i) = B,$$

и все эти точки лежат внутри δ.

Так как δ нормальна, то в силу первой леммы существует простая дуга σ_1, выходящая из b_1, лежащая целиком в δ и отображающаяся посредством (1) на C таким образом, что всякой точке C, отличной от B, соответствует единственная точка на σ_1 и лишь точке B соответствуют концы b_1 и b_2 дуги σ_1, которые могут и не совпадать. В самом деле, достаточно применить лемму последовательно к двум дугам, составляющим C и имеющим общий конец в точке B.

Предположим, что $b_2 \neq b_1$. Тогда обозначим σ_2 дугу, аналогичную дуге σ_1, но выходящую из b_2. Вторым ее

концом будет точка b_3. Продолжая этот процесс, не более чем через m шагов мы придем к некоторой простой замкнутой кривой c, лежащей внутри δ. В самом деле, все σ_i — простые дуги, а две последовательные дуги σ_i не могут иметь в окрестности своих общих концов других общих точек, кроме этих концов. Когда точка p пробегает в определенном направлении кривую c, то ее образ P пробегает все время в одном и том же направлении $n \leqslant m$ раз окружность C.

Пусть γ — жорданова область, определенная в (p) при помощи кривой c. $I(\gamma)$ замкнута и компактна, и все ее граничные точки лежат на C. Следовательно, $I(\gamma)$ совпадает с Γ, откуда следует, что γ нормальна и содержится в δ.

На c имеется n точек b_i. Предположим сначала, что $n = 1$. Я утверждаю, что тогда отображение (1) будет на γ топологическим. В самом деле, допустим, что внутри γ найдутся две различные точки p_1 и p_2, имеющие один и тот же образ P. Через точки A, P и B можно провести простую дугу Σ, лежащую в Γ и не имеющую с окружностью C общих точек, кроме точки B. В γ существуют две простые дуги, выходящие соответственно из p_1 и p_2 и отображающиеся топологически посредством (1) по отдельности на часть дуги Σ, заключенную между точками P и B, а также существуют две другие аналогичные дуги, выходящие из тех же точек и отображающиеся на часть дуги Σ, заключенную между P и A. Первые оканчиваются в точке b — единственной точке из γ, которая, по предположению, отображается в B; последние же оканчиваются в a — единственной точке в U, а следовательно, и в γ, которая отображается в A. Таким образом, имеем жорданову область d, определенную при помощи этих дуг или при помощи некоторых их частей. $I(d)$ замкнута, компактна, и вся ее граница лежит на Σ. Но так как Σ — простая дуга, то это невозможно, и p_1 не может быть отличной от p_2. С другой стороны, то, что говорилось выше об отображении на c, показывает, что всякая точка окружности C, в том числе и B, имеет единственную соответствующую ей точку на c. Следовательно, отображение является топологическим на γ.

Предположим теперь, что $n > 1$. Пусть b_1 и b_2 — две различные точки b_i, а σ_1 и σ_2 — две выходящие соответственно из b_1 и b_2 простые дуги, каждая из которых отображается топологически на определенную выше дугу Σ. Обе эти дуги (за исключением точек b_1 и b_2) лежат внутри γ, так как единственной точкой, соответствующей в δ точке A, является точка a, лежащая внутри γ, и никакая из этих дуг не может пересекать c. Я утверждаю, что другой общей точки, кроме a, эти дуги иметь не могут. В самом длее, пусть β — их первая общая точка, если идти по σ_1 и σ_2 от b_1 и b_2 к точке a. Тогда частичные дуги $b_1\beta$ и $b_2\beta$ образуют с каждой из дуг b_1b_2 кривой c жорданову область, лежащую в γ. Если $\beta \neq a$, то одна из этих областей, пусть d, не содержит точки a, а значит, и ни одной точки, соответствующей точке A. Но $I(d)$ замкнута и компактна и вся ее граница лежит на Σ и на C. Следовательно, $I(d)$ совпадает с Γ и в d имеется прообраз точки A. Это противоречие показывает, что β не может быть отличной от a.

Пусть теперь b_1 и b_2 — две последовательные точки b_i при обходе c. Жорданова область, определенная при помощи σ_1, σ_2 и дуги b_1b_2 кривой c, на которой между b_1 и b_2 нет ни одной точки b_i, отображается на Γ, как и определенная выше область d. Отображение будет топологическим на каждой из дуг σ_1 и σ_2 и на b_1b_2 между ее концами. Вся внутренность этой области отображается в точки круга Γ, лежащие вне Σ и C, и отображение на этой внутренности будет топологическим, как показывает рассуждение, аналогичное вышеприведенному.

Резюмируя доказанное, можно сформулировать следующую теорему, которая показывает, что локальное обращение внутренних отображений с топологической точки зрения проводится так же, как и для аналитических функций:

В любой окрестности произвольной точки a многообразия V существует замкнутая жорданова область $\gamma \subset V$ с точкой a внутри, являющаяся нормальной областью отображения (1) *и обладающая следующим свойством:*

Область γ можно разбить на конечное число n секторов при помощи n простых дуг, выходящих из a, оканчивающихся на границе области γ и не имеющих друг с другом, кроме a, никаких общих точек, таким образом, чтобы каждый из этих секторов отображался при помощи (1) *на область $I(\gamma)$ и чтобы, кроме того, отображение было топологическим внутри каждого сектора, а также на дугах разбиения γ, каждую из которых оно переводит в такую же дугу внутри $I(\gamma)$* [1]).

Очевидно, что *точки a многообразия V, для которых $n > 1$, изолированы.* В окрестности точек, для которых $n = 1$, отображение называется *локально топологическим.*

По аналогии с терминологией, принятой для аналитических функций, мы будем точки, для которых $n > 1$, называть *кратными точками порядка $n-1$* [или *точками ветвления* отображения (1)].

Эта теорема является основной в теории внутренних отображений. Ниже мы дадим некоторые приложения этой теоремы.

III. Новая топологическая характеристика римановых поверхностей. Теорема о топологической эквивалентности для аналитических функций

1. Локальные свойства, только что установленные для обращения внутренних отображений, приводят нас к новой топологической характеристике римановых поверхностей, что равносильно новому определению ориентируемых поверхностей.

Пусть V — любое двумерное топологическое многообразие и S — многообразие, гомеоморфное евклидовой сфере. Предположим, что существует внутреннее отображение

$$P = I(p) \tag{1}$$

---

[1]) Эта теорема доказана в моей работе в «Annales de l'Ecole Normale», 3-я серия, т. 45, 1928, стр. 367. См. также «Annales de l'Institut Henri Poincaré», т. II, 1932, стр. 251.

V в S, причем множество $I(V)$ может занимать как все S, так и его часть.

Покажем, что это условие влечет за собой триангулируемость и ориентируемость многообразия V.

Очевидно, S можно заменить комплексной плоскостью, что мы и будем считать выполненным. Тогда рассмотрим на S все круги с рациональными радиусами, центры которых образуют заданное счетное множество, всюду плотное на S[1]). Обозначим эту совокупность, содержащую не более чем счетное множество кругов, через (Г).

2. Обозначим через (Δ) семейство всевозможных нормальных областей Δ многообразия V, удовлетворяющих следующим условиям: 1) Δ лежит в подмножестве G многообразия V, гомеоморфном евклидовой плоскости; 2) Δ есть максимальная область для одного из кругов Г относительно некоторой точки $p \in V$ (причем Г и p взяты произвольно). Таким образом, всякая точка из V будет находиться внутри некоторой области Δ. Покажем, что семейство (Δ) содержит не более чем счетное число областей.

Так как V связно и всякая точка многообразия V лежит внутри множества, гомеоморфного евклидовой плоскости, то всегда можно любые две точки p_0 и p_1 из V соединить непрерывным путем, лежащим на V. Обозначим этот путь через l. Всякая точка из l лежит внутри некоторой области Δ, а значит, и внутри отрезка Δl линии l[2]). К линии l можно применить лемму Бореля — Лебега и заключить точки этой линии в конечное число отрезков вида Δl, а значит, и в конечное число областей Δ. Отсюда вытекает, что для любой пары областей Δ_0 и Δ_1 существует *цепь*, состоящая из *конечного* числа областей Δ, первая из которых есть область Δ_0, а последняя Δ_1, и таких, что две последовательные

[1]) Точка $z = \infty$ считается включенной в это множество. Под кругами с рациональными радиусами с центром в этой точке понимаются множества $|z| \geqslant \rho$, где ρ рационально.

[2]) Так как l по определению есть непрерывный образ отрезка прямой, который всегда можно предположить равным [0, 1], то *отрезком линии* l назовем образ отрезка, содержащегося в [0, 1].

области этой цепи всегда имеют общие внутренние точки.

Для того чтобы доказать, что число областей Δ не более чем счетно, достаточно, естественно, доказать, что имеется не более чем счетное число цепей, которые мы только что определили. Для этого мы покажем, что каждая область Δ имеет общие точки не более чем со счетным числом других областей Δ. Так как области одной и той же цепи должны последовательно налегать [1]) друг на друга и число их во всякой цепи конечно, то тем самым сформулированное предложение будет доказано.

Если две области Δ, полученные из одного и того же круга Γ_1, налегают на Δ_0, то они отсекают на границе F_0 области Δ_0 простые дуги, которые не могут иметь друг с другом общих точек, кроме, быть может, общих концов. В самом деле, если Δ_1 — такая область, то $I(\Delta_1 F_0)$ есть дуга границы круга $\Gamma_0 = I(\Delta_0)$, заключенная в Γ_1. Тогда теорема, сформулированная в конце предыдущего раздела, показывает, что $\Delta_1 F_0$ образовано дугами, имеющими на границе области Δ_1 только свои концы. Итак, две области Δ, полученные из Γ_1, не могут иметь никаких общих внутренних точек.

Следовательно (см. II, п. 5), имеется лишь конечное число различных $\Delta_1 F_0$ из F_0 и, значит, лишь конечное число Δ, полученных из Γ_1 и налегающих на Δ_0. Но кругов Γ счетное множество, и, таким образом, не более чем счетным будет и число областей Δ, налегающих на Δ_0.

3. Мы только что показали, что V может быть покрыто счетным множеством областей Δ. Всякая Δ, будучи компактной не только в V, но и в G, может быть покрыта в свою очередь конечным числом нормальных областей, аналогичных областям γ из предыдущей теоремы. Следовательно, счетное множество областей γ покрывает все многообразие V.

При накрытии многообразия S многообразием V при помощи отображения (1) выполняются условия I и II

---

[1]) Две области «налегают» друг на друга, если они имеют общие внутренние точки.

(стр. 51) римановой накрывающей. В самом деле, в каждой области γ, как показывает теорема обращения, можно удовлетворить условию II, а условие I удовлетворяется для тех же γ.

4. Обратно: если V гомеоморфно некоторой римановой поверхности, то существует внутреннее отображение V в S. В самом деле, пусть R — риманова поверхность, которой гомеоморфно многообразие V. На R существует аналитическая функция (глава II); она определяет внутреннее отображение R в S, если S — область значений функции. Поскольку R преобразуется в V топологическим отображением, то произведение этих двух отображений дает внутреннее отображение V в S. Следовательно, мы можем сформулировать следующее предложение, содержащее в себе топологическую характеристику римановых поверхностей:

Для того чтобы двумерное топологическое многообразие было гомеоморфно римановой поверхности (то есть триангулируемо и ориентируемо), *необходимо и достаточно, чтобы существовало внутреннее отображение этого многообразия на комплексную плоскость или на ее часть*[1]).

Из этой теоремы сразу вытекает возможность следующим образом видоизменить определение римановых поверхностей, данное нами в главе II:

Риманова поверхность есть двумерное многообразие, накрывающее комплексную плоскость при помощи внутреннего отображения.

Как мы видим, это определение тесно связано с понятием накрывающего многообразия. Оно существенно отличается от определения Вейля — Радо. В самом деле, последнее использует лишь локальное свойство: возможность конформного отображения окрестности каждой точки на плоскость, и тем самым вводит аналитическое условие. Определение же, данное здесь, напротив, использует глобальное свойство многообразия: существование внутреннего отображения этого многообразия в сферу. Это условие является топологическим и не использует конформные отображения.

---

[1]) S. Stoïlow, Compositio Mathematica, т. 3, 1936, стр. 435.

5. Топологическая характеристика аналитических функций на их римановой поверхности. Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, поставленный нами в начале этой главы. Этот ответ дает нам доказанная в предыдущем разделе теорема обращения и только что установленное предложение.

Пусть V — двумерное топологическое многообразие и

$$w = I(p) \tag{2}$$

— внутреннее отображение V в комплексную плоскость (w). Предложение п. 4 показывает, что V и отображение (2) определяют некоторую риманову поверхность R'. Согласно теореме, доказанной в главе II (раздел III), существует такая аналитическая функция

$$z = f(w) = f[I(p)], \tag{3}$$

где $f\ [I(p)]$ однозначна на V и на R', что R' является римановой поверхностью для $f(w)$. Пусть

$$w = \varphi(z) \tag{4}$$

— аналитическая функция, обратная (3), и R — ее риманова поверхность[1]). Поверхность R гомеоморфна R', а значит, и V. Обозначим через q любую точку на R. Тогда существует такое топологическое отображение

$$p = T(q)$$

R на V, что функция (4), являющаяся однозначной на R, может быть записана в виде

$$w = F(q) = I[T(q)],$$

если принять во внимание соотношение (2). Отсюда заключаем, что:

Для любого внутреннего отображения (2) *топологического многообразия V в комплексную плоскость* (w) *существует топологическое отображение V на риманову поверхность R, преобразующее внутреннее отображение* (2) *в аналитическую функцию, риманова поверхность которой есть R.*

---

[1]) Эта риманова поверхность определяется как накрывающая (z) многообразием V при помощи внутреннего отображения $z = f\ [I(p)]$.

Так как (3) допускает бесконечное множество вариантов, то сведение (2) к аналитической функции может быть проделано бесконечным числом способов. Если многообразие V подобно однолистным, то общий принцип униформизации Кёбе показывает, что функция (4) может быть выбрана однозначной во всей своей области существования; если же V односвязно, то основная теорема теории униформизации Пуанкаре и Кёбе позволяет взять T так, чтобы V отображалось внутрь круга или на евклидову плоскость, если оно открыто (на сферу, если оно замкнуто), и отображение становится мероморфной функцией на этой поверхности.

Замечание. Если в рассуждениях пп. 2 и 3 вместо комплексной плоскости рассматривать риманову поверхность R, то теорема, которая там приведена, будет давать необходимые и достаточные условия для того, чтобы V было гомеоморфно накрывающей поверхности для R. Тогда, если V — многообразие, подобное однолистным, то (2) топологически эквивалентно униформизирующей функции поверхности R или части R.

6. В заключение этой главы можно сказать, что общая теорема эквивалентности показывает, что все свойства, которые мы называли топологическими свойствами аналитических функций, являются следствием двух основных свойств, характеризующих внутренние отображения.

Следовательно, топологическая теория аналитических функций совпадает с теорией внутренних отображений, точно так же как топология римановых поверхностей совпадает с топологией ориентируемых поверхностей.

ГЛАВА VI

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РИМАНОВЫХ НАКРЫВАЮЩИХ

I. О непрерывном продолжении внутренних отображений

1. В этой главе нам понадобится лемма о непрерывном продолжении внутреннего отображения, представляющая полную аналогию с классическим предложением теории функций. Вот ее формулировка:

Лемма. *Предположим, что отображение*

$$P = F(p) \tag{1}$$

одного двумерного многообразия V в другое многообразие W обладает следующими свойствами:

1° *Оно непрерывно на V.*

2° *Для некоторого замкнутого всюду разрывного множества E из V отображение* (1) *является внутренним в $V - E$.*

3° *Множество $F(E) = E_1$ замкнуто и всюду разрывно в W.*

При этих условиях мы докажем, что (1) *есть внутреннее отображение V* [1]).

Допустим, что это не так. Тогда на E найдется такая точка a, что для некоторой замкнутой и компактной области δ из V, содержащей a внутри, точка $A = F(a)$ будет граничной для $F(\delta)$. Рассмотрим множество точек

$$H = F^{-1}(E_1) \tag{2}$$

---

[1]) Обобщение этой леммы можно найти в книге Ю. Ю. Трохимчука «Непрерывные отображения и условия моногенности», М., 1963, стр. 84. *(Прим. ред.)*

многообразия V, имеющих свои образы на E_1. Условия, наложенные на E_1 и на E, и определение внутренних отображений показывают, что это множество замкнуто и всюду разрывно. Значит, внутри δ можно определить жорданову область d с точкой a внутри и с границей γ, не имеющей *ни одной* общей точки с H. Для $F(d)$ точка A является *тем более* граничной. Но так как $F(d)$ замкнуто, то любая часть его границы должна содержать точки, не принадлежащие E_1, на основании условия 3°. Таким образом, существует последовательность точек P_i, *не принадлежащих* E_1, лежащих *на границе* $F(d)$ и таких, что

$$\lim_{i\to\infty} P_i = A. \tag{3}$$

Так как P_i принадлежат $F(d)$, то на d существует последовательность $\{p_i\}$ соответствующих точек, таких, что

$$P_i = F(p_i). \tag{4}$$

Все эти p_i лежат вне H, а значит, и вне E. Но в $d-E$ отображение является внутренним. Следовательно, все p_i лежат на γ и *на* γ имеется по крайней мере одна из их предельных точек α. Но согласно (3) и (4) должно выполняться равенство

$$F(\alpha) = A \in E_1,$$

откуда следует, что α принадлежит H. Это невозможно, так как γ по построению не содержит ни одной точки из H.

2. Приложение к аналитическим функциям, непрерывным на множестве их особенностей. Если E — совершенное, всюду разрывное на плоскости (z) множество, то известно, что функция

$$F(z) = \iint_E \frac{d\omega}{z-\zeta}, \tag{5}$$

где $d\omega$ есть элемент площади множества E, а ζ — любая точка этого множества, непрерывна на всей комплексной плоскости (z) и не равна тождественно нулю, если мера E положительна. Точки множества E будут особыми для $F(z)$.

Впрочем, для существования таких функций, первые примеры которых были даны Помпейю[1]), не обязательно, чтобы множество особых точек имело положительную меру; в самом деле, Данжуа[2]) показал, что плоская мера этого множества может быть равна нулю, в то время как его длина бесконечна.

Для любого совершенного всюду разрывного множества особенностей E и любого способа построения функции $F(z)$, непрерывной на E, легко показать, что если $F(z)$ непрерывна на всей плоскости (z), то она полностью определяется своими значениями, принимаемыми на E[3]). Более того, достаточно, чтобы эти значения были заданы на *сколь угодно малой* части множества E, для того чтобы $F(z)$ была определена[4]). Воспользуемся леммой, доказанной в предыдущем пункте, для того чтобы установить следующее, более общее предложение:

Пусть $F(z)$ непрерывна в открытой области G плоскости (z) и голоморфна в $G-E$, где E — совершенное всюду разрывное множество. *Тогда значения функции $F(z)$ в G* (а следовательно, и во всей области существования) *полностью определяются значениями $F(z)$, принимаемыми ею на множестве E.*

Достаточно доказать, что если $F(z)$ равна нулю на E, то она тождественно равна нулю в G. Итак, предположим, что $F(E)=0$. Если $F(z)$ не равна тождественно нулю в G, то отображение, определенное соотношением

$$Z=F(z)$$

и непрерывное в G, будет внутренним в $G-E$. Значит, в силу леммы оно будет внутренним и в G, так как $E_1=F(E)$ сводится здесь к началу координат плоскости (Z). Но тогда E, имея в качестве образа единственную точку, должно состоять из изолированных точек, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $F(z)\equiv 0$ во всей области G.

---

[1]) D. Pompeiu, Comptes rendus, т. 139, 1904, стр. 914 и Annales de la Faculté des Sciences de Toulusе, 1905.

[2]) A. Denjoy, Comptes rendus, т. 148, 1909, стр. 1154.

[3]) D. Pompeiu, Circolo Matematico di Palermo, т. 29, 1910, стр. 306.

[4]) A. Denjoy, Comptes rendus, т. 149, 1909, стр. 326.

3. Образ множества E при отображении (5) содержит континуум, так как вся граница образа получается из E и этот образ ограничен в (Z). Любой же конкретный пример функции, подобной $F(z)$ из только что доказанного предложения, но *отображающей множество своих особенностей E на всюду разрывное множество E_1*, позволил бы построить аналитическую функцию, обладающую следующими свойствами:

1° Она однозначна и непрерывна во всей плоскости и принимает на ней любое комплексное значение.

2° Она стремится к бесконечности, когда $|z| \to \infty$.

3° Она обладает *совершенным всюду разрывным множеством особых точек.*

4° *Она однолистна во всей плоскости* (z).

Действительно, лемма п. 1 совместно с теоремой обращения из главы V позволяет выделить область, в которой $F(z)$ *однолистна* и обладает свойством 3°. Пусть Γ — круг, лежащий внутри этой области и содержащий внутри особые точки функции $F(z)$. Пусть f — функция, осуществляющая конформное отображение $F(\Gamma)$ на круг $|w| \leqslant 1$. Функция

$$w = f|F(z)|,$$

отображающая круг Γ на круг $|w| \leqslant 1$, может быть продолжена на всю плоскость (z) и является искомой функцией.

Очевидно, что такая функция должна была бы обладать основными свойствами линейных функций, даже имея совершенное множество особенностей. Несмотря на то, что имелись серьезные основания для того, чтобы предполагать существование таких функций, ни один пример функции, обладающей указанными четырьмя свойствами, не был, насколько мне известно, до сих пор построен [1]).

---

[1]) Данжуа заметил, что такой пример можно было бы построить непосредственно, если исходить из функции такой, как $F(z)$, производная которой оставалась бы ограниченной во всей плоскости (z). В самом деле, для этого достаточно было бы рассмотреть функцию

$$2Mz + F(z),$$

где $M = \sup |F'(z)|$. См. также цитированные работы Данжуа,

II. Полная риманова накрывающая и внутренние отображения конечной степени

1. Говорят, что бесконечная последовательность точек пространства *стремится к границе* [1]), если она не содержит никакой бесконечной подпоследовательности, компактной в пространстве.

Пусть заданы ориентируемые поверхности R и S. Рассмотрим внутреннее отображение

$$P=I(p) \tag{1}$$

R в S. Будем говорить, что (1) определяет *полную накрывающую* поверхности S поверхностью R, если для любой последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$$

точек из R, стремящейся к границе, последовательность образов

$$I(a_1), I(a_2), \ldots, I(a_m), \ldots$$

стремится к границе в S.

Легко видеть, что в этом случае $I(R)$ совпадает с S, то есть что всякая точка A из S есть образ хотя бы одной точки из R. В самом деле, если бы это было не так, то $I(R)$ имела бы в S граничную точку B, которая должна лежать вне $I(R)$. Тогда рассмотрим в $I(R)$ последовательность точек $\{B_m\}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} B_m = B.$$

Последовательность $\{b_m\}$ точек из R, удовлетворяющих для любого m равенству

$$B_m = I(b_m),$$

стремится к границе в R в изложенном выше смысле. Так как, с другой стороны, B лежит в S, то это противоречит определению полной накрывающей.

2. Итак, накрытие S поверхностью R является полным. Но определение полной накрывающей содержит в

---

[1]) Это выражение легко оправдывается в случае, когда одно пространство погружено в другое. Обобщая, мы употребляем здесь это выражение в более широком смысле.

себе более сильное утверждение: в самом деле, мы покажем, что *любой точке A поверхности S в R соответствует одно и то же число точек*[1]).

Следовательно, полная накрывающая не только осуществляет полное накрытие, но и распределена над S так, что всякая точка этой поверхности является проекцией одного и того же числа точек поверхности R. Это фиксированное число n называется *степенью отображения* (1).

Для доказательства нашего предложения рассмотрим триангуляцию T_i поверхности R, и пусть

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ \ldots \tag{2}$$

— последовательность точек из R, удовлетворяющих условию

$$A = I(a_m)$$

для любого m. Из результатов предыдущей главы следует, что если последовательность (2) состоит из бесконечного числа различных точек, то она стремится к границе в R. В этом случае каждый треугольник T_i может содержать лишь конечное число точек последовательности (2).

Построим вокруг точки A на S жорданову область Δ и каждой точке a_m поставим в соответствие точку a'_m так, чтобы выполнялись следующие условия:

1° Точка $A'_m = I(a'_m)$ лежит в Δ.

2° $A'_{m_1} \neq A'_{m_2}$, если $m_1 \neq m_2$.

3° a'_m лежит в том же треугольнике T_i, что и a_m.

Из теоремы обращения, доказанной в главе V, сразу вытекает, что такой выбор точек a'_m может быть осуществлен.

Из условий 1° и 2° видно, что последовательность $\{I(a'_m)\}$ бесконечна и компактна. С другой стороны, 3° показывает, что последовательность $\{a'_m\}$ стремится к границе. Это противоречит нашему предположению; следовательно, последовательность (2) содержит лишь ко-

---

[1]) Точки ветвления должны считаться столько раз, каков порядок их кратности; они представляют столько же совпадающих точек.

нечное число различных членов, а так как порядок кратности каждой точки a_m конечен, то множество всех точек p из R, удовлетворяющих условию

$$A = I(p), \tag{3}$$

конечно. Пусть n — число различных или совпадающих решений уравнения (3). Остается показать, что n не зависит от a.

В п. 1 было показано, что для любого A из S $n \geqslant 1$. Итак, пусть

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \tag{4}$$

суть n точек, соответствующих A. Согласно теореме обращения вокруг каждой точки a_i существует жорданова область γ_i, удовлетворяющая следующим условиям:

1° Для любого i

$$I(\gamma_i) = \Gamma,$$

где Γ — жорданова область на S, не зависящая от i и содержащая точку A внутри.

2° γ_i не пересекаются.

3° Для любого $B \in \Gamma$ уравнение

$$B = I(p)$$

имеет точно n решений во множестве $\sum \gamma_i$ (все эти решения различны, если $B \neq A$).

Я утверждаю, что если Γ лежит в надлежащим образом выбранной окрестности точки A, то число решений уравнения

$$B = I(p) \tag{5}$$

равно в точности n на *всей* поверхности R, то есть что уравнение (5) имеет решения лишь в $\sum \gamma_i$. Действительно, в противном случае существовала бы бесконечная последовательность точек

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_m, \tag{6}$$

стремящаяся к A и такая, что если в (5) заменить B на одну из точек последовательности (6), то число решений будет больше n. Но это означает, что вне $\sum \gamma_i$ суще-

ствует последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$ такая, что для любого m

$$B_m = I(b_m).$$

Последовательность же точек b_m заведомо не может стремиться к границе в силу этих уравнений и сделанного выше предположения. Следовательно, в R существует точка β, предельная для b_m, и эта точка не лежит внутри ни одного из γ_i. Но

$$I(\beta) = A,$$

откуда следует, что β есть некоторое a_i, и, таким образом, мы пришли к противоречию. Значит, точки b_m не существуют и всякой точке B, лежащей в подходящим образом выбранной окрестности точки A, соответствует не более n решений уравнения (5).

Следовательно, множество точек A поверхности S, которым соответствует одно и то же число n, открыто в S. Но два таких множества, соответствующие двум различным значениям n, очевидно, не пересекаются. А так как S связна, то имеется лишь одно такое множество, занимающее всю поверхность S, и наше предложение доказано [1].

3. Полная накрывающая поверхностей конечной связности. Предположим теперь, что R по-прежнему осуществляет полное накрытие S, что обе эти поверхности конечного рода и что S, кроме того, имеет конечное число граничных элементов в смысле главы IV. Тогда на основании теоремы о гомеоморфизме, доказанной в этой главе, R и S можно заменить обобщенными торами $\overline{D}$ и $\overline{D}'$ (того же рода), из которых исключены замкнутые всюду разрывные множества F и F'. Таким образом, поверхности R и S будут представлены на этих обобщенных торах соответственно в виде областей

$$D = \overline{D} - F \text{ и } D' = \overline{D}' - F'.$$

[1] Всякое внутреннее отображение замкнутой поверхности R на другую поверхность S (тоже обязательно замкнутую в этом случае) обладает теми же свойствами и будет рассматриваться как полное накрытие.

Пусть g — род поверхности R, а g' — род поверхности S (и, следовательно, торов $\overline{D}$ и $\overline{D}'$), и пусть μ и μ' — соответственно число граничных элементов этих поверхностей. По предположению g, g' и μ' конечны. Мы покажем, что μ *по меньшей мере равно* μ', *но тоже является конечным числом.*

В представлении поверхностей R и S на обобщенных торах каждая точка множеств F и F' соответствует некоторому граничному элементу соответствующей поверхности. Я утверждаю, что отображение (1) однозначно ставит в соответствие каждой точке из F точку из F' и что всякой точке из F' соответствует по крайней мере одна точка из F. Установив это соответствие, получим сразу, что $\mu' \leqslant \mu$.

Рассмотрим последовательность $\{a_i\}$ точек из D, стремящуюся к определенной точке α из F. Последовательность $\{I(\alpha_i)\}$ стремится к F' по предположению. Мы покажем, что она стремится к определенной точке α' из F'. В самом деле, если бы $\{I(\alpha_i)\}$ имела две различные предельные точки α_1' и α_2' из F', то любой непрерывный путь L, лежащий в D, проходящий последовательно через a_i в порядке возрастания индекса и стремящийся к α, имел бы своим образом путь L' в D', пересекающий бесконечное число раз простую замкнутую кривую $\varkappa$, лежащую в D' и разделяющую α_1' и α_2'. Но тогда на L существовала бы последовательность точек, стремящаяся к α, образы которых лежали бы на $\varkappa$. Так как $\varkappa$ компактна в D', то мы вступаем в противоречие с определением полной накрывающей. Следовательно, точки α_1' и α_2' совпадают и точке α соответствует единственная точка α'. С другой стороны, ясно, что всякая последовательность, стремящаяся к определенной точке α', порождает последовательность, стремящуюся к некоторой точке α. Следовательно, $\mu' \leqslant \mu$.

Остается показать, что μ — конечное число, то есть что F, так же как и F', содержит лишь конечное число точек. Для этого заметим, что соответствие между F и F', которое мы только что определили, непрерывно, значит, оно непрерывно продолжает отображение (1) на $\overline{D}$. Но лемма, доказанная в п. 1 предыдущего раздела, по-

казывает, что тогда непрерывное отображение $\overline{D}$ на $\overline{D}'$ будет внутренним на всем $\overline{D}$. Так как F' состоит из μ' точек и так как это число, по предположению, конечно, то, значит, и μ конечно. Итак, наше утверждение полностью доказано.

4. Приложение к одной теореме Адамара. Возьмем в качестве поверхностей R и S конечные комплексные плоскости (z) и (w). Тогда всякая последовательность, стремящаяся к границе, есть последовательность, стремящаяся к бесконечности. По теореме эквивалентности, доказанной в предыдущей главе, существует такое топологическое отображение T плоскости (z) на (z'), что если $w=I(z)$ есть полная накрывающая (w) плоскостью (z), то

$$w=I\left[T^{-1}(z')\right] \tag{7}$$

есть *аналитическая функция* от z' во всей плоскости (z'), тоже, естественно, определяющая полную накрывающую плоскости (w). В самом деле, достаточно заметить, что так как поверхность, накрывающая (w) при помощи (z), замкнута (так как комплексная плоскость (z), на которой может быть определено отображение $I(z)$, включает точку ∞), то ее можно целиком конформно отобразить на (z'). Следовательно, функция, определенная при помощи соотношения (7), является многочленом от z', ибо бесконечно удаленные точки плоскостей (z) и (z') соответствуют друг другу.

Теперь, следуя Адамару[1]), предположим, что заданное отображение (z) на (w) будет *локально топологическим* всюду в (z). Так как полученный многочлен от z' топологически эквивалентен этому отображению, то он не имеет точек ветвления, то есть линеен. Отсюда заключаем, что заданное отображение, так же как и этот многочлен, будет *топологическим во всей плоскости* (z), и мы получаем следующую теорему, доказанную Адамаром:

[1]) J. Hadamard, Sur les transformations ponctuelles (Bulletin de la Société Math. de France, т. 34, 1906). Эта теорема была обобщена многими авторами, см., например, Banach и Mazur, Studia Mathematica, т. 5, 1934, стр. 174, где имеется также очень полная библиография по этому вопросу.

Всякое непрерывное отображение евклидовой плоскости в себя, являющееся всюду локально топологическим, отображает эту плоскость топологически на себя, если любая последовательность точек, стремящаяся к бесконечности, отображается в такую же последовательность точек [1,2]).

III. Теорема Эйлера для полиэдрических областей. Формула Гурвица и критерии взаимной однозначности

1. Теорема Эйлера. Известно, что найденное Эйлером соотношение между числами граней, ребер и вершин обычных многогранников сводится к соотношению между числами треугольников, сторон и вершин любой триангуляции сферы.

Теорема Эйлера распространяется на случай любой полиэдрической области D рода g, обладающей μ контурами. В этом общем случае соотношение имеет вид

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2 - c, \tag{1}$$

где N_0, N_1 и N_2 означают соответственно число вершин, сторон (ребер) и треугольников (граней), а c означает порядок связности $\mu + 2g$ области D [3]).

Для доказательства этого соотношения рассмотрим прежде всего самый простой случай, когда $g=0$ и $\mu=1$. Тогда, как мы показали в главе IV, D можно рассматривать как плоскую замкнутую область, ограниченную одним многоугольным контуром. В этом случае соотношение (1) будет иметь вид

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1. \tag{2}$$

Для случая одного треугольника оно справедливо.

---

[1]) Условие, сформулированное Адамаром (см. сноску выше), имеет метрический характер. Мы заменили его аналогичным топологическим условием, благодаря которому теорема поддается широким обобщениям.

[2]) Можно, например, доказать, что всякое локально гомеоморфное накрытие f односвязного пространства S пространством R является гомеоморфизмом, если для любого пути $l' \subset S$, исходящего из произвольной точки $a' \in S$, и любого прообраза a_j точки a' найдется путь l_j, исходящий из a_j и проектирующийся в путь l'. (Точки l_j проектируются в точки l' с тем же параметром.) *(Прим. ред.)*

[3]) Число $c - 2$ называется *характеристикой* D.

С другой стороны, если оно верно для плоского множества $n-1$ треугольников, ограниченного одним контуром, то оно останется верным, если число этих треугольников увеличить на единицу. В самом деле, когда мы переходим от $n-1$ к n, то или числа N_0 и N_2 возрастают каждое на единицу, в то время как N_1 увеличивается на два, или N_0 не увеличивается, но в таком случае и N_1 и N_2 увеличиваются на 1. Таким образом, левая часть соотношения (2) остается без изменений, и, значит, соотношение сохраняется.

Рассмотрим теперь случай, когда $g=0$, а μ любое. При помощи разрезов, соединяющих последовательно друг с другом μ контуров из D, сведем этот случай к предыдущему, то есть к случаю одного контура. Каждый из разрезов, которые производятся при помощи многоугольных линий триангуляции, разбивает каждый контур на две части, прибавляя вершин на единицу больше, чем сторон, и увеличивая тем самым на единицу левую часть соотношения (2). Но разрезов всего $\mu-1$. Вычитая это число из правой части формулы (2), получим

$$N_0-N_1+N_2=2-\mu,$$

что доказывает (1) для случая $g=0$.

Наконец, общий случай можно свести к предыдущему при помощи g разрезов вдоль g замкнутых многоугольников триангуляции. Тогда получим полиэдрическую область нулевого рода с $\mu+2g$ контурами. Замкнутые разрезы не изменяют левую часть соотношения (1). Следовательно, это соотношение доказано для любых g и μ.

2. Формула Гурвица. Возьмем снова обобщенные торы $\overline{D}$ и $\overline{D}'$ предыдущего раздела, области D и D', получающиеся из $\overline{D}$ и $\overline{D}'$ исключением μ точек α и μ' точек α', и внутреннее отображение D в D', определяющее полную накрывающую. Мы представим число точек ветвления r этого отображения в виде функции от g, g', μ, μ' и n (степень отображения), причем каждая из этих точек будет входить в r с учетом порядка ветвления, определенного в главе V.

Для этого мы устроим сначала триангуляцию $\overline{D}'$ так, чтобы каждый треугольник T_i' при заданном отоб-

ражении был взаимно однозначным образом каждой из своих максимальных областей. Такая триангуляция всегда возможна в силу теоремы обращения. В самом деле, достаточно, взяв каждый из T'_i в надлежащих окрестностях, выбрать в качестве вершин T'_i образы точек ветвления. Каждому из этих T'_i будет соответствовать n максимальных областей, в каждой из которых отображение будет топологическим и которые в совокупности осуществляют триангуляцию тора $\overline{D}$.

Каждому T'_i соответствует n треугольников T_k, каждой стороне треугольника T'_i соответствует n различных сторон треугольников T_k. Но в том случае, когда отображение имеет точки ветвления, некоторым вершинам треугольников T'_i может соответствовать менее n различных вершин треугольников T_k. Пусть N_0, N_1, N_2 — число вершин, сторон и треугольников T_k, N'_0, N'_1 и N'_2 — аналогичные числа для T'_i. Тогда

$$N_2 = nN'_2,$$

$$N_1 = nN'_1,$$

и если $\bar{r}$ означает число точек ветвления отображения, продолженного, как и в предыдущем пункте, на весь тор $\overline{D}$, то

$$N_0 = nN'_0 - \bar{r}.$$

Порядок связности торов $\overline{D}$ и $\overline{D}'$ будет равен соответственно $2g$ и $2g'$. Следовательно, имеем

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2 - 2g$$

или, принимая во внимание вышестоящие соотношения, получим

$$n(N'_0 - N'_1 + N'_2) - \bar{r} = 2 - 2g,$$

то есть

$$\bar{r} = (2 - 2g')n + (2g - 2).$$

Для того чтобы перейти от $\bar{r}$ к r, заметим, что точки ветвления продолженного отображения, не принадлежащие заданному отображению, находятся среди точек α

и их число равно $n\mu' - \mu$. Если же все точки α обыкновенные, то $n\mu' = \mu$. Следовательно,

$$r = (2 - c')n + (c - 2), \tag{3}$$

где c' и c означают соответственно порядок связности области D' и D.

Соотношение (3) есть *формула Гурвица*. В частном случае, когда D' представляет собой всю сферу ($g' = \mu' = 0$), а D — замкнутую риманову поверхность ($\mu = 0$), получаем классическую формулу Римана, связывающую между собой число точек ветвления, род и число листов римановой поверхности алгебраической функции[1]).

3. Критерий взаимной однозначности для внутреннего отображения. *Точкой взаимной однозначности* внутреннего отображения $P = I(p)$ назовем всякую точку A, для которой все решения уравнения

$$A = I(p)$$

сливаются в одно-единственное.

Предположим еще, что внутреннее отображение R в S удовлетворяет условию полного накрытия. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — m точек, выбранных в S, и k_i — число различных решений уравнений

$$A_i = I(p) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

Тогда, естественно, $k_i \leqslant n$ и

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \geqslant mn - r,$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, если все точки ветвления находятся среди решений уравнений (4).

Следовательно, учитывая (3), получим

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \geqslant n(m + c' - 2) + 2 - c,$$

---

[1]) Заметим, что (3) сразу же дает неравенство

$$c' \leqslant c,$$

так как $r \geqslant 0$.

откуда при $m>2-c'$ будем иметь

$$n \leqslant \frac{c-2+\sum\limits_{i=1}^{m} k_i}{m+c'-2}.$$

Предположим, что все A_i являются точками взаимной однозначности. Тогда

$$n \leqslant \frac{m+c-2}{m+c'-2},$$

откуда вытекает, что если

$$m>c-2c'+2, \tag{5}$$

то n должно быть меньше 2, то есть $n=1$.

Следовательно, всякое отображение R на S, определяющее полную накрывающую, будет топологическим (а накрытие простым), *если число точек взаимной однозначности будет больше* $c-2c'+2$. Отсюда сразу получается, что (5) может выполняться лишь при $c=c'$, откуда вытекает следующее заключение: полное накрытие поверхности R собою будет простым при $c>1$, если только существует хоть одна точка взаимной однозначности.

IV. Кусочно регулярная риманова накрывающая и обобщение формулы Гурвица. Топологическое обобщение теоремы Данжуа об аналитических функциях

1. До сих пор мы предполагали, что внутреннее отображение

$$P=I(p) \tag{1}$$

поверхности R на S определяет полную риманову накрывающую поверхности S посредством R. Теперь мы ослабим это условие, рассмотрев более общее накрытие, что приведет нас к обобщению формулы Гурвица.

Сохраняя обозначения, равно как и предположения, сделанные относительно порядка связности R и S [1]),

---

[1]) Мы предполагаем здесь a priori, что порядок связности для R и для S *конечен,* хотя это предположение, как и в случае полной накрывающей, может быть ослаблено.

рассмотрим снова топологические образы D и D' этих двух поверхностей, полученные путем исключения μ точек α и μ' точек α' соответственно из обобщенных торов $\overline{D}$ и $\overline{D}'$. Отображение (1) будем всегда считать отображением D на D'.

Рассмотрим на D' конечную систему простых замкнутых непересекающихся кривых Г, каждая из которых служит общей границей двух различных открытых областей множества $D' - \Sigma\Gamma$. Будем говорить, что отображение (1) определяет *кусочно регулярную* накрывающую D' посредством D, если это внутреннее отображение удовлетворяет следующим двум условиям, которые мы обозначим через (β):

(β_1) Всякой последовательности точек из D, стремящейся к границе (то есть к точкам α из $\overline{D}$), соответствует последовательность, все предельные точки которой либо являются точками α', либо лежат на кривых Г.

(β_2) Множество точек из D, образы которых лежат на кривых Г, либо компактно в D, либо пусто.

Обозначим через D_i' различные области, определенные на D' кривыми Г. Некоторые из этих областей могут теперь быть вообще не покрыты при отображении $I(D)$; другие же могут быть покрыты неодинаковое для различных областей число раз. Следовательно, условие (β_1) является более свободным в сравнении с соответствующим условием для полной накрывающей. Что же касается условия (β_2), то оно не вводит никаких новых ограничений, так как в случае, рассмотренном в предыдущем разделе, это условие неявно выполнено.

Так как кривые Г попарно не пересекаются и точки α' лежат вне этих кривых, то можно точно так же, как и выше (II, п. 3), доказать, что всякой точке α отображение (1) ставит в соответствие либо кривую Г, либо вполне определенную точку α' и что всякая точка α' соответствует хотя бы одной точке α.

Рассмотрим фиксированную область D_i' и максимальную область (D_i', a), полученную, как это делалось в главе V, исходя из произвольной точки a, образ которой лежит в D_i'. Обозначим через D_{ij} все максимальные области для области D_i'. Для любого j имеем $I(D_{ij}) = D_i'$,

и накрывающая D_i' при помощи D_{ij} будет в силу условия (β_1) полной накрывающей. Отсюда в силу вышеизложенного следует, что отображение (1) в каждой области D_{ij} обладает вполне определенной конечной степенью n_{ij} и что в каждой из этих областей справедлива формула Гурвица. Более того, можно, как и выше (II, п. 1), показать, что если точка A лежит внутри D_i', то в D найдется лишь конечное число точек, для которых A является образом; следовательно, число областей D_{ij} конечно.

Обозначив порядок связности и число точек ветвления теми же символами, что и в предыдущем разделе, и снабдив их соответствующими индексами, получим

$$r_{ij} = (2 - c_i')\, n_{ij} + (c_{ij} - 2). \tag{2}$$

Для того чтобы получить r, нужно просуммировать эти соотношения.

2. Предположим, что образы всех точек ветвления области D *лежат вне кривых* Γ. При этих условиях, если две области из множества областей $\overline{D}_{ij}$ имеют общую граничную точку, то они имеют целый общий контур, образованный простой кривой, проходящей через эту точку.

В самом деле, заметим прежде всего, что точки α не могут лежать на границе $\overline{D}_{ij}$ в силу условия (β_2). С другой стороны, пусть a — общая граничная точка двух областей $\overline{D}_{ij}$. Так как образ точки a лежит на кривой Γ и так как Γ — простые кривые, не содержащие образов точек ветвления, то по теореме обращения через a можно провести лишь одну простую дугу, образ которой лежит на Γ. Эта дуга составляет часть общей границы двух $\overline{D}_{ij}$. Ее можно продолжать до тех пор, пока она не вернется снова в точку a, и это продолжение на всем своем протяжении будет общей границей двух областей $\overline{D}_{ij}$. Таким образом, видно, что границы областей $\overline{D}_{ij}$ образованы простыми замкнутыми кривыми (контурами) и что любая пара этих контуров либо не имеет общих точек, либо совпадает.

Следовательно, каждая область D_{ij} имеет границу, состоящую из изолированных точек α и из конечного

числа контуров областей $\overline{D}_{ij}$. Две области $\overline{D}_{ij}$ будем называть *смежными,* если они имеют один или несколько общих контуров.

Пусть $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ — две смежные области $\overline{D}_{ij}$, μ_1 и μ_2 — соответственно число их контуров, а m — число их общих контуров.

Тогда замкнутая область

$$\overline{D}_1+\overline{D}_2=\overline{D}_3$$

имеет

$$\mu_3=\mu_1+\mu_2-2m \tag{3}$$

контуров.

Пусть g_1, g_2 и g_3 — род областей $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ и $\overline{D}_3$. Покажем, что тогда

$$g_3=g_1+g_2+m-1. \tag{4}$$

Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ m общих контуров областей $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$. Легко видеть, что система кривых

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1} \tag{5}$$

области D_3 не разбивает $\overline{D}_3$: в самом деле, можно пройти вдоль непрерывной линии от любой точки области $\overline{D}_1$ к любой точке области $\overline{D}_2$, не пересекая ни одного контура, фигурирующего в (5).

С другой стороны, на D_1, по предположению, существует g_1 непересекающихся замкнутых кривых, не разбивающих $\overline{D}_1$, и g_2 аналогичных кривых на D_2. Выберем раз и навсегда g_1+g_2 таких кривых и назовем их *фундаментальными.*

Ни одна из фундаментальных кривых не имеет общих точек с кривыми (5), лежащими вне D_1 и D_2. Следовательно, эти кривые, объединенные с фундаментальными, образуют на D_3 систему (H) из g_1+g_2+m-1 непересекающихся кривых, не разбивающих $\overline{D}_3$. Таким образом,

$$g_3 \geqslant g_1+g_2+m-1. \tag{6}$$

Если бы равенство не имело места, то на D_3 можно было бы указать кривую γ', не имеющую общих точек с предыдущими и такую, что система $(H)+\gamma'$ не разбивает $\overline{D}_3$. Покажем, что это невозможно. Разрежем $\overline{D}_3$

по кривым (H). Все сводится к тому, чтобы показать, что полученная таким способом полиэдрическая область $\bar{\delta}$ будет подобна однолистной. Но $\bar{\delta}$ есть сумма полиэдрических областей $\bar{\delta}_1$ и $\bar{\delta}_2$, полученных разрезанием соответствующих им областей $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ вдоль фундаментальных кривых, и каждая из этих частей $\bar{\delta}$ подобна однолистной области. Для получения $\bar{\delta}$ части $\bar{\delta}_1$ и $\bar{\delta}_2$ склеиваются только по кривой γ_m, следовательно, их сумма будет также подобна однолистной области[1]). Значит, в (6) имеет место равенство, что и доказывает соотношение (4).

Таким образом, из (2) получаем для числа точек ветвления в D_3

$$r_3 = c_1 + c_2 - 4 + n_1(2 - c_1') + n_2(2 - c_2'), \tag{7}$$

где буквы с индексами означают соответствующие величины для областей D_1, D_2 и D_3[2]). Из (3) и (4) получаем

$$c_3 = \mu_3 + 2g_3 = c_1 + c_2 - 2.$$

Тогда соотношение (7) принимает вид

$$r_3 = c_3 - 2 + n_1(2 - c_1') + n_2(2 - c_2').$$

При последовательном сложении смежных областей D_{ij} все точки ветвления будут исчерпаны, так как всякая область D_{ij} (не совпадающая с D) имеет общий контур по крайней мере с одной из других областей D_{ij} и каждый из контуров принадлежит двум областям D_{ij} в силу условий, сформулированных для Г.

Итак, обозначая через n_i сумму $\sum\limits_j n_{ij}$, получаем для всей области D

$$r = c - 2 + \sum_i n_i(2 - c_i'). \tag{8}$$

---

[1]) Это можно увидеть, например, отобразив $\bar{\delta}_1$ и $\bar{\delta}_2$ топологически на внешнюю и внутреннюю части круга $|z| \leq 1$ плоскости (z) так, чтобы окружность $|z| = 1$ соответствовала γ_m, и отождествив отображения по этой окружности.

[2]) Значит, здесь n_1 и n_2 являются теми n, которые мы обозначали выше при помощи *двух* индексов.

Эта формула является обобщением формулы Гурвица [1]). Чтобы доказать формулу (8) для всех случаев, необходимо освободиться от условия, что образы точек ветвления не могут находиться на кривых Г.

Ясно, что для каждой точки α найдется окрестность, не содержащая точек ветвления. В самом деле, α, как мы уже заметили, всегда является частью границы единственной области D_{ij}, а в этой области число точек ветвления конечно, что было доказано в предыдущем разделе. В окрестности каждой точки α, которой соответствует кривая Г, возьмем жорданову область $\delta \subset \overline{D}$ так, чтобы: 1) никакая из областей δ не содержала точек ветвления; 2) области δ были непересекающимися и 3) образы Γ' границ этих областей были весьма близки к Г, но не содержали образов точек ветвления. Такой выбор δ всегда возможен: достаточно взять простые кривые Γ' так близко к Г, чтобы в области, ограниченной кривыми Г и Γ', а также на Γ' не было образов точек ветвления [2]), и определить затем δ как максимальные области (в окрестностях точек α) для областей, ограниченных кривыми Г и Γ'. Если теперь заменить точки α соответствующими областями δ, а кривые Г кривыми Γ', то можно к $\Delta = D - \sum \delta$ применить проведенное выше рассуждение, так как условия (β) выполняются и для Δ, а кривые Γ' будут удовлетворять условию, наложенному на Г в начале этого пункта. Но элементы, фигурирующие в (8), не изменятся при переходе от D к Δ, если Γ' и δ будут достаточно близкими к Г и α. Следовательно, соотношение (8), справедливое для Δ, остается верным и в D, и ограничение снято.

3. Топологическое обобщение одного результата Данжуа. Рассмотрим функцию $F(z)$, мероморфную в жордановой области D и на ее контуре C. Предположим, что на C функции $F(z)$ и $F'(z)$ не имеют ни нулей, ни полюсов. Если на C

$$|F(z)| = \text{const} \tag{9}$$

---

[1]) S. Stoïlow, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2-я серия, т. 57, 1933, стр. 355.

[2]) Число этих точек конечно.

и число различных полюсов функции $F(z)$ в D совместно с числом ее различных нулей равно m, то *производная $F'(z)$ имеет в D точно $m-1$ нулей, отличных от нулей функции $F(z)$*.

Это утверждение было выведено Данжуа из более общей теоремы и составляет ее наиболее важный частный случай[1]).

Формула (8) позволяет дать широкое топологическое истолкование этого предложения. В самом деле, чтобы получить теорему, достаточно взять в качестве D внутренность исходной жордановой области на (z) с m выколотыми точками, являющимися нулями или полюсами $F(z)$, в качестве D' — комплексную плоскость значений функции $F(z)$ с выколотыми точками 0 и ∞, а в качестве Γ — соответствующую окружность на этой плоскости с центром в начале координат. Тогда условие (β_1) будет вытекать из (9), а условие (β_2) — из отсутствия нулей для $F'(z)$ на C. Более того, видно также, как этот результат может быть обобщен.

Рассмотрим, например, рациональную функцию

$$w=R(z)$$

и в плоскости (w) рассмотрим простую замкнутую кривую Γ, не содержащую ни одной точки, которая служила бы образом точки ветвления функции $R(z)$. Кривой Γ в плоскости (z) соответствуют простые замкнутые кривые. Ко всякой области, ограниченной одной или несколькими из таких кривых, можно применить формулу Гурвица или ее обобщение, смотря по тому,

---

[1]) A. Denjoy, Sur une propriété des fonctions de variable complexe (Academie des Sciences d'Amsterdam, заседание 29 декабря 1917 г., т. 26, стр. 1063). Общая теорема Данжуа предполагает только, что F имеет вид

$$F(z)=(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_m)^{\alpha_m}G(z),$$

где a_i и α_i — произвольные константы, а $G(z)$ голоморфна и не имеет нулей ни в D, ни на C. Кроме того, условие $|F|=\text{const}$ на C заменяется следующим: «аргумент функции F изменяется в одном и том же направлении, когда z пробегает C». Вышеупомянутый частный случай был позже непосредственно найден Аландером (Comptes rendus, т. 184, 1927, стр. 1411).

покрывает ли эта область лишь одну из областей, определенных кривой Г в плоскости (w), или всю плоскость (w) [1]).

В своей книге «Топологические» методы в теории функций комплексного переменного» Марстон Морс дал обобщение теоремы Данжуа — Аландера (указанный частный случай теоремы Данжуа), отличное от того, которое дает равенство (8).

По этому поводу заметим, что «контрпример», при помощи которого Морс пытается опровергнуть (стр. 80 его цитированной работы) утверждение нашей статьи в Comptes rendus, т. 190, 1930, стр. 251, не учитывает нашего условия (β_2) (стр. 169), которое в частном случае Аландера, отмеченном в этой работе, выражается более сильным условием отсутствия на границе точек ветвления.

V. Асимптотические значения аналитической функции на ее римановой поверхности

1. Для того чтобы вернуться к случаю любых аналитических функций, рассмотрим внутреннее отображение произвольной ориентируемой поверхности R в сферу S. Мы будем всегда обозначать его через $P=I(p)$. Согласно теореме об эквивалентности, на R можно так определить угловую метрику, чтобы это отображение можно было рассматривать как аналитическую функцию, для которой R была бы римановой поверхностью. Точка $P=I(p)$ называется *значением* функции (или отображения) в точке p.

Точку A сферы S будем называть *асимптотическим значением* отображения $P=I(p)$, если на R существует непрерывный путь $p=p(t)$ (где t — действительный параметр, изменяющийся от нуля до бесконечности) такой, что:

---

[1]) Можно заметить, что в случае, когда в плоскости (z) рассматривается область, ограниченная лишь одним из контуров, соответствующих Г, а накрывающая не является полной, числа n_i, соответствующие двум областям в плоскости (w), определяемым Г, будут всегда различны. Это вытекает из принципа аргумента.

1) путь стремится к границе, то есть всякая последовательность точек

$$p(t_0),\ p(t_1),\ \ldots,\ p(t_n),\ \ldots$$

этого пути, соответствующая возрастающей последовательности значений параметра t, стремящейся к ∞, стремится к границе R в смысле определения, данного в этой главе (II, п. 1);

2) $$\lim_{t\to\infty} I\,[p\,(t)] = A.$$

Если мы в этом определении заменим понятие *пути*, стремящегося к границе, понятием *последовательности*, обладающей тем же свойством, то получим понятие более широкое, чем предыдущее, — понятие *предельного значения* отображения.

Предельные значения образуют на S замкнутое множество L, называемое предельным множеством. На S множество L определяет счетное (или конечное) множество областей S_i, составляющих дополнение L на S. Каждой области S_i соответствует конечное число максимальных областей, и в каждой из них отображение определяет полную накрывающую для S_i (в смысле II). Следовательно, каждая точка области S_i представляет собой значение, принимаемое при отображении конечное число раз (которое может быть и нулем). Напротив, значения точек из L могут приниматься бесконечное число раз.

Существование непустого множества L означает, что отображение не осуществляет полного накрытия сферы S. Если накрытие является кусочно регулярным (в смысле IV), то кривые Γ образуют множество L и условия (β) показывают, что всякая точка из L есть значение, принимаемое конечное число раз. Вообще, любая точка из L, лежащая на границе некоторой области S_i, представляет собой значение, принимаемое *самое большее* столько же раз, что и точки, образующие S_i. В самом деле, теорема обращения показывает, что множество значений, принимаемых не более чем n раз, замкнуто.

Теперь мы покажем, что *для любого внутреннего отображения предельные значения, принимаемые лишь*

конечное число раз, образуют на S множество первой категории[1]).

Поскольку множество значений, принимаемых не более чем n раз, замкнуто, равно как и L, то замкнуто и само предельное множество значений, принимаемых не более чем n раз. Обозначим его через F_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Если обозначить через E множество предельных значений, принимаемых лишь конечное число раз, то

$$E=F_0+F_1+F_2+\ldots+F_n+\ldots$$

Если бы E не было множеством первой категории, то по крайней мере одно из F_i содержало бы круг из S. Пусть F_k —множество с наименьшим индексом, удовлетворяющее этому условию, и пусть Γ — круг, содержащийся в F_k. В Γ найдется точка A, имеющая кратность k. Возьмем круг Γ около точки A столь малым, чтобы области γ_i, которые по теореме обращения соответствуют прообразам a_i[2]) точки A, имели этот круг в качестве образа. В множестве областей γ_i всякое значение из Γ будет в точности k-кратным. Но A — предельное значение; следовательно, вне γ_i существует точка b, образ B которой лежит внутри Γ. Таким образом, это значение B принимается по крайней мере $k+1$ раз, что противоречит выбору множеств F_k и круга Γ. Следовательно, все F_i нигде не плотны, и теорема доказана.

Известно, что множество первой категории не может заполнять никакой сколь угодно малой области из S. Следовательно, для того чтобы существовали предельные значения бесконечной кратности, необходимо и достаточно, чтобы L содержало некоторый круг, то есть имело внутренние точки.

Множества первой категории можно рассматривать как множества, бесконечно разреженные относительно пространства. Они играют в топологии ту же роль, что

---

[1]) Множеством первой категории, следуя Бэру, назовем множество, являющееся суммой не более чем счетного числа нигде не плотных множеств.

[2]) Если $k=0$, то a_i не существуют, и, значит, рассуждение неприменимо. Но очевидно, что F_0 нигде не плотно на S, так как это множество есть не что иное, как граница $I(R)$ на S, которая всегда будет нигде не плотной.

и множества меры нуль в метрических теориях. Значит, вполне законно будет называть *исключительными* те предельные значения, которые принимаются лишь конечное число раз [1]).

2. Асимптотические значения являются частным случаем предельных значений. Между ними и исключительными значениями имеется связь, выражаемая следующей теоремой:

Всякое исключительное значение внутреннего отображения является либо асимптотическим значением, либо пределом асимптотических значений.

Доказательство опирается на лемму, которую можно сформулировать следующим образом:

Пусть Δ — замкнутая область на S и a — такая точка на R, что $I(a)$ лежит внутри Δ. Если образ максимальной области (Δ, a) не покрывает всей внутренности Δ, то внутри Δ обязательно существует по крайней мере одно асимптотическое значение.

Обозначим через E образ области (Δ, a). По условию на границе E найдется точка B, лежащая внутри Δ. Точка B не может принадлежать E, так как тогда она получалась бы из граничной точки области (Δ, a), которая в этом случае не была бы максимальной. Возьмем круг Γ_1 с центром в B, лежащий целиком в Δ, и точку A_1 внутри $E\Gamma_1$. Так как A_1 лежит внутри E, то в (Δ, a) найдется по крайней мере одна точка a_1 такая, что $I(a_1) = A_1$ и максимальная область (Γ_1, a_1) лежит в (Δ, a). Образ E_1 области (Γ_1, a_1) не может покрывать всего круга Γ_1, так как он оставляет непокрытой точку B, лежащую внутри Γ_1. При помощи тех же самых рассуждений, что и выше, получаем, что существует граничная точка B_1 множества E_1, лежащая внутри Γ_1 и не принадлежащая E_1. Рассматривая круг Γ_2 с центром B_2, лежащий целиком внутри Γ_1, и так далее, получим последовательность кругов

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots \tag{1}$$

---

[1]) Для некоторых классов внутренних отображений можно подробнее исследовать природу множества исключительных значений. По поводу этого вопроса мы отсылаем читателя к нашей работе в «Mathematica», т. XII, 1936, стр. 123, а также к цитируемой выше работе, опубликованной в «Annales de l'Institut Poincaré», стр. 260.

таких, что $\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n$, причем круги можно выбрать так, чтобы радиус круга Γ_n стремился к нулю вместе с $1/n$.

Последовательность областей

$$(\Gamma_1, a_1),\ (\Gamma_2, a_2),\ \ldots,\ (\Gamma_n, a_n),\ \ldots \tag{2}$$

обладает тем же свойством включения, что и (1), и никакая из областей этой последовательности не будет компактной в R, так как образ ни одной из них не покрывает соответствующего круга Γ.

Рассмотрим на R непрерывный путь λ, определенный соотношением $p = p(t)$, где параметр t изменяется от 0 до ∞, и такой, что для любого значения k найдется такое h, что если $t > h$, то

$$p(t) \subset (\Gamma_k, a_k).$$

Точка b будет предельной для λ, если для любой окрестности U_b точки b и любого положительного числа r найдется значение $t_1 > r$ такое, что $p(t_1)$ лежит внутри U_b. Ясно, что каждая такая точка b лежит во всех областях последовательности (2).

Пусть C — множество точек, принадлежащих всем областям последовательности (2). Это множество либо содержит континуум, либо состоит из единственной точки, либо пусто. С другой стороны, образ $I(C)$ принадлежит всем областям последовательности (1), то есть состоит из единственной точки C_0, лежащей внутри Δ. Следовательно, множество C не может содержать континуума.

Пусть b_0 — общая точка последовательности (2), и пусть δ — жорданова область из R, содержащая b_0 внутри. Всякая область (2) имеет точки, лежащие на границе области δ, так как все эти области содержат b_0 и ни одна из них не компактна в R. Значит, на этой границе имеется точка, общая всем членам последовательности (2) и отличная от b_0, что противоречит предположению. Следовательно, множества (2) не имеют общих точек, а это означает, что λ — путь, стремящийся к границе в смысле, определенном выше. Так как, с другой стороны, $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = C_0$, то очевидно, что C_0 — асимптотическое значение.

Доказав эту лемму, легко получаем из нее теорему, сформулированную в начале этого пункта.

Действительно, пусть A — исключительное предельное значение. Если A не является образом при отображении, то лемма показывает, что в любом круге с центром в A имеется асимптотическое значение, и, следовательно, теорема доказана. Если же A будет n-кратным значением, то пусть

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \qquad (3)$$

— прообразы точки A. Можно, как мы уже неоднократно делали, определить такие непересекающиеся области $\gamma_i \subset R$, имеющие точки (3) внутри, и такой достаточно малый круг $\Gamma \subset S$ с центром в A, что $I(\gamma_i) = \Gamma$, причем образ границы каждой из областей γ_i лежит на границе Γ. Но вне γ_i имеется такая точка a', что $I(a')$ лежит внутри Γ, так как A — предельное значение. Максимальная область (Γ, a') не может иметь общих внутренних точек ни с одним из γ_i. Следовательно, эта область не содержит ни одной точки (3), то есть ни одного прообраза точки A. Тогда согласно лемме в Γ имеется по крайней мере одно асимптотическое значение. Так как Γ произвольно мало, то это доказывает теорему.

3. Известно, что в случае функций, мероморфных в целой плоскости, и даже в более общих случаях [1]) исключительные значения являются асимптотическими значениями. Но в общем случае может оказаться, что некоторые из этих значений будут лишь предельными для асимптотических значений. Шпильрейн и Кирст [2]) построили несколько примеров таких аналитических функций. В силу теоремы об эквивалентности, доказанной в предыдущей главе, достаточно построить внутренние отображения, обладающие тем же свойством, так как понятия асимптотического значения и исключительного значения, очевидно, являются топологическими инвариантами. А такие примеры построить очень легко.

Рассмотрим отображение $X = e^x \cos y$, $Y = e^x \sin y$. открытой области D плоскости (x, y), определенной сле-

---

[1]) См. цитированную работу из «Mathematica».

[2]) Fundamenta Mathematicae, т. XXI, 1933, стр. 292.

дующим образом: (4)

$$|y| < 1 + \pi + \sin\frac{1}{x} \quad \text{для} \quad |x| \leqslant \frac{1}{\pi},$$

и y любое для $|x| > \frac{1}{\pi}$.

Все образы, лежащие на окружности $X^2 + Y^2 = 1$ (значение $X = -1$, $Y = 0$ исключается), являются пределами асимптотических значений отображения (4), не будучи в то же время асимптотическими. Они являются исключительными, так как, составляя часть L, каждое из этих значений принимается не более чем один раз в D (именно на оси y между $y = -\pi$ и $y = +\pi$).

Замечание. Для всего вышесказанного не обязательно, чтобы R была целой римановой поверхностью рассматриваемой функции: R может быть открытой областью этой поверхности или поверхностью, на которой функция однозначна.

В предыдущем примере можно осуществить конформное отображение D на внутренность единичного круга. Таким образом получим функцию, аналитическую в $|z| < 1$, обладающую в D тем же свойством, что и отображение (4), но не имеющую круга $|z| < 1$ в качестве римановой поверхности. Однако теорема существования главы II показывает, что D можно конформно отобразить на односвязную риманову поверхность R так, чтобы R была всей римановой поверхностью функции, полученной при этой замене в (4).

4. Прежде чем закончить, отметим еще красивый результат, полученный совсем недавно Кирстом[1]): множество асимптотических значений функции, мероморфной в круге $|z| < 1$, может быть *любым* аналитическим множеством (A-множеством в смысле Суслина и Лузина). Теорема Кирста показывает, насколько общим может быть это множество даже для наиболее простого случая внутренних отображений.

---

[1]) Fundamenta Mathematicae, т. XXVII, 1936, стр. 226.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Об аналитических функциях, римановы поверхности которых имеют всюду разрывные границы *)

В работе, опубликованной в 1926 г. в «Bulletin de la Société Mathématique de France», Жюлиа положил начало общему исследованию функций $y(x)$, определяемых посредством целого соотношения

$$G(x, y)=0. \tag{1}$$

Жюлиа получил результаты и построил интересные примеры, показывающие одновременно различие и сходство случая, когда $G(x, y)$ является произвольной целой функцией переменных x и y, с теми хорошо известными случаями, когда эта функция линейна относительно y (функции, мероморфные во всей конечной плоскости) или является многочленом от y (алгеброидные функции).

Эти и другие, аналогичные им предложения, как мы покажем, могут быть объединены на основе общего свойства, которым обладают решения уравнения (1), а также некоторые другие классы функций и которое может служить определением достаточно широкого семейства аналитических функций.

Выражаясь скорее образно, чем точно, можно было бы охарактеризовать это семейство, сказав, что римановы поверхности составляющих его функций обладают всюду разрывными границами. Такая формулировка находит свое строгое выражение в следующем свойстве,

---

*) Впервые опубликовано в журнале «Mathematica» (Клуж), т. XII, 1936, стр. 123—138.

выявленном Иверсеном в его диссертации[1]), где оно появилось в связи с важными теоремами о функциях, обратных мероморфным:

Если имеется произвольный (правильный, дробный или критический алгебраический) элемент функции и любой путь, выходящий из области определения этого элемента и оканчивающийся в любой точке комплексной плоскости, то всегда можно продолжить функцию, отправляясь от данного элемента, *вдоль пути; сколь угодно близкого к заданному и оканчивающегося в той же точке, что и первый.*

Функцией Иверсена будем называть всякую однозначную или многозначную функцию, обладающую указанным свойством. Это свойство мы будем обозначать через (I) [2]).

Хотя основной целью этой работы будет освещение некоторых свойств трансцендентных функций, определяемых соотношением (1), при помощи свойства (I), характеристического для более общего класса функций Иверсена, тем не менее объектом нашего внимания будут служить главным образом сами функции Иверсена. Эти функции образуют достаточно широкий класс, который с некоторых точек зрения представляется и более естественным, так как содержит все суперпозиции, которые можно получить при помощи двух любых содержащихся в нем функций.

---

[1]) F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions meromorphes, Хельсинки, 1914, стр. 24.

[2]) Известно, что отсутствие на границе римановой поверхности непрерывных линий никоим образом не влечет за собой того же для *проекции* этой границы на комплексную плоскость: в самом деле, известны функции, обратные к целым функциям (функции, римановы поверхности которых мы называли выше «поверхностями с всюду разрывными границами»), для которых эта проекция покрывает всю плоскость (W. Gross, Mathematische Annalen, т. 79, 1918, стр. 201).

С другой стороны, нельзя смешивать то, что мы обозначаем здесь словом «граница» римановой поверхности, с множеством граничных элементов этой поверхности, рассматриваемой как топологическая поверхность. «Разрывность всюду» «границы» в нашем понимании *не является топологическим свойством поверхности*, то есть не остается инвариантной при любом топологическом отображении последней.

Следовательно, с одной стороны, найденные Жюлиа свойства функций, определяемых соотношением (1), будут связаны здесь со свойством (I), а с другой стороны, это свойство принадлежит, наряду с другими функциями, и функциям, обратным к мероморфным, и потому функции, обратные самым общим функциям Иверсена, будут служить способом распространения на *римановы поверхности* понятия функции, мероморфной в обычной плоскости. С этой точки зрения результат, который мы получим, можно будет рассматривать как распространение классической теоремы Вейерштрасса о предельных значениях, соответствующих изолированной существенно особой точке; таким образом, теорема становится некоторым образом применимой к любой функции, обратной функции Иверсена. Отсюда получим также, что множество исключительных значений в смысле Пикара для этих функций может быть полностью охарактеризовано.

Часть этих результатов опубликована в моей работе во II томе «Annales de l'Institut Henri Poincaré» (1932) в качестве приложения некоторых общих топологических свойств аналитических функций[3]). Здесь они будут уточнены и распространены на общий случай многозначных функций.

I. Функции, определяемые неявно при помощи целого соотношения, и свойство (I)

1. Однозначные функции Иверсена совпадают с функциями, область существования которых является на комплексной сфере дополнением замкнутого всюду разрывного множества, то есть множества, не содержащего никакого континуума, отличного от точки.

Назовем *обобщенной алгеброидной* всякую функцию $x(y)$, определяемую при помощи неприводимого соотношения

$$A_0(y)x^n+A_1(y)x^{n-1}+\ldots+A_n(y)=0,$$

где $A_i(y)$ — однозначные функции Иверсена.

---

[3]) То, что я называл там «отображением, обладающим свойством Иверсена», соответствует здесь функциям, обратным функциям Иверсена.

Так как любой элемент такой функции можно продолжить — в крайнем случае через критические алгебраические или через дробные элементы — вдоль любого пути, не проходящего через особые точки ни одной из функций $A_i(y)$, то ясно, что всякая обобщенная алгеброидная функция (и, в частности, всякая алгеброидная функция) есть функция Иверсена.

2. Рассмотрим теперь функцию $x=x(y)$, определяемую неприводимым соотношением [4])

$$G(x, y)=0, \tag{1}$$

где $G(x, y)$ — целая функция. Покажем, что $x(y)$ есть функция Иверсена.

Пусть y_0 — произвольная конечная точка в плоскости переменного y. Точке y_0 можно поставить в соответствие такой круг Γ_{y_0} с центром в y_0, что:

1° Любая ветвь функции $x(y)$, определенная в Γ_{y_0}, оставляет непокрытой одну и ту же достаточно малую область (δ) плоскости (x), если рассматривать эти ветви только в той их части, которая соответствует Γ_{y_0}.

2° Внутри Γ_{y_0} существует по крайней мере одна точка y_1 такая, что уравнение

$$G(x, y_1) = 0 \tag{2}$$

имеет хотя бы одно решение относительно x.

В самом деле [за исключением того случая, когда (1) не удовлетворяется никакой парой (x, y), то есть соотношение (1) не определяет никакой функции], можно выбрать такую точку $x=X$, чтобы уравнение

$$G(X, y) = 0 \tag{3}$$

имело хотя бы одно решение относительно y и чтобы все решения этого уравнения были отличны от y_0.

Пусть $y=Y_1$ — такое решение уравнения (3) (или одно из таких), расстояние которого до y_0 достигает минимального значения. Для Y_1 функция $x(y)$ определена,

---

[4]) Определение этого понятия, а также исследование *целых кривых* можно найти в работах Анри Картана в «Bulletin des Sciences Mathématiques», т. 54, 1930 и т. 55, 1931.

поскольку

$$G(X, Y_1) = 0.$$

На основании известной теоремы о неявных функциях она определена также в некоторой окрестности точки $y = Y_1$, а значит, в частности, и в точке y_1, достаточно близкой к Y_1 и такой, что

$$|y_0 - y_1| < |y_0 - Y_1|.$$

Любой круг с центром в y_0 и радиусом, меньшим $|y_0 - Y_1|$, но большим $|y_0 - y_1|$, удовлетворяет условиям 1° и 2° и может, следовательно, быть взят в качестве Γ_{y_0}.

В самом деле, выполнение условия 2° очевидно, так как этот круг содержит точку y_1. Что же касается условия 1°, то допустим, что оно не выполняется; тогда найдется последовательность точек x_n, стремящаяся к X и такая, что для каждого x_n существует точка y_n, лежащая в нашем круге и удовлетворяющая соотношению

$$G(x_n, y_n) = 0.$$

Но это равносильно существованию в этом *круге* точки Y_0, предельной для точек y_n и удовлетворяющей равенству

$$G(X, Y_0) = 0,$$

что, очевидно, невозможно, так как среди всех точек y, удовлетворяющих (3), не существует точек, отстоящих от y_0 меньше чем на $|y_0 - Y_1|$. Значит, ветви функции $x(y)$ оставляют непокрытой малую область, окружающую точку X.

Таким образом, мы каждой точке y_0 плоскости (y) поставили в соответствие круг Γ_{y_0} с центром в y_0, удовлетворяющий сформулированным выше условиям 1° и 2°.

3. Изменив надлежащим образом рассуждение Валирона[5]), докажем теперь следующее предложение:

Любой элемент функции $x(y)$, соответствующий точке y_1, можно продолжить до y_0, не выходя из Γ_{y_0}.

---

[5]) G. Valiron, Comptes rendus, т. 166, 1918, стр. 382.

Пусть R_x — риманова поверхность функции $y(x)$ и p — произвольная точка этой поверхности[6]). Функция $y(p)$ однозначна на R_x, и ее значение в точке p является одним из значений функции $y(x)$, где x — проекция точки p.

Элемент функции $x(y)$, взятый в y_1, характеризуется точкой y_1 и соответствующим ей значением $x=x_1$[7]). Значению x_1 соответствует точка p_1 на R_x, являющаяся элементом, обратным к (y_1, x_1). Устроим теперь всеми возможными способами такое продолжение из точки p_1, при котором образ точки p в отображении $y(p)=y$ не выходил бы из *внутренности* Γ_{y_0}. Точки p опишут на R_x открытую область, которую мы обозначим (в соответствии со способом ее определения) через $\Delta(p_1, \Gamma_{y_0})$. Любой точке p и всякой области из (y), содержащей внутри себя ее образ, соответствует одна и только одна область Δ.

Предположим сначала, что $\Delta(p_1, \Gamma_{y_0})$ *компактна* в R_x [то есть что любая бесконечная последовательность точек, принадлежащих этой области, обладает хотя бы одной предельной точкой в R_x, причем предельная точка может быть и бесконечностью, если R_x содержит такую точку, то есть если функция $x(y)$, обратная к $y(x)$, имеет полюс]. В этом случае теорема доказывается сразу. Действительно, пусть $\bar{\Delta}$ — замыкание $\Delta(p_1, \Gamma_{y_0})$ на R_x (то есть объединение этой области и ее предельных точек). Тогда образ области $\bar{\Delta}$ при отображении $y(p)=y$ будет занимать весь круг Γ_{y_0}, включая окружность, так как этот образ должен быть замкнутым и его граничные точки могут получаться лишь из точек $\bar{\Delta}$, не являющихся внутренними; образы же всех таких точек лежат на окружности круга Γ_{y_0}. Значит, в этом случае в $\Delta(p_1, \Gamma_{y_0})$ найдется точка p_0, образом которой будет y_0,

---

6) Риманову поверхность можно рассматривать как совокупность правильных, дробных и алгебраических элементов функции. «Точку» римановой поверхности мы будем обозначать через p, чтобы не путать эту точку с точкой x, которая является ее проекцией *на плоскость* (x), то есть аффиксом центра элемента, соответствующего p.

7) Для некоторых пар (x_1, y_1) имеется несколько таких элементов, но всегда конечное число.

и, следовательно, эта точка будет достижимой при продолжении функции $x(y)$ внутри Γ_{y_0}.

Предположим теперь, что $\Delta(p_1, \Gamma_{y_0})$ не компактна в R_x, и рассмотрим какую-нибудь бесконечную последовательность точек этой области

$$p_n = \alpha_n,$$

не имеющую предельных точек в R_x.

Пусть x_n — аффикс проекции точки α_n. Различным α_n может соответствовать одна и та же проекция, а значит, одно и то же комплексное число x_n. Но не может существовать бесконечного множества точек α_n, имеющих одну и ту же проекцию ξ. Действительно, ввиду того, что все α_n лежат в $\Delta(p_1, \Gamma_{y_0})$, наличие такого бесконечного множества различных точек α_n означало бы, что уравнение

$$G(\xi, y) = 0$$

имеет в Γ_{y_0} бесконечное множество решений y. Но очевидно, что это невозможно, так как G — целая функция, а Γ_{y_0} — ограниченная область.

Теперь мы покажем, что всегда

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty.$$

В самом деле, если бы это было не так, то существовало бы такое фиксированное положительное число M, что

$$|x_{n_i}| < M \tag{4}$$

для бесконечного числа индексов $n_1, n_2, \ldots$, то есть для бесконечного числа α_n: $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots$ Но тогда в силу вышесказанного должно найтись бесконечное множество *различных* комплексных чисел x_{n_i}, удовлетворяющих (4); значит, эти числа должны иметь конечную предельную точку X в плоскости (x). Пусть $\{X_m\}$ — выделенная из $\{x_{n_i}\}$ и стремящаяся к X последовательность, состоящая из различных элементов. Каждому X_m соответствует в Γ_{y_0} такая точка Y_m, что (X_m, Y_m) является одной из точек α_n и

$$G(X_m, Y_m) = 0.$$

Следовательно, существует элемент (X, Y) функции $y(x)$, где X конечно, а Y лежит в Γ_{y_0}, являющийся пределом последовательности элементов той же функции, выделенной из (X_m, Y_m), и, значит, на R_x имеется предельная точка для α_n, вопреки выбору этой последовательности. Таким образом, неравенство (4) невозможно и x_n стремятся к бесконечности вместе с n.

4. Теперь мы можем применить рассуждение Валирона для доказательства того, что в $\Delta(p_1, \Gamma_{y_0})$ функция

$$\frac{1}{y(p)-y_0}$$

не может оставаться ограниченной, что эквивалентно нашему основному утверждению, сформулированному в начале предыдущего пункта.

Предположим, что эта функция в области Δ по модулю меньше M. Пусть $x=a$ — точка плоскости (x), взятая внутри малой области (δ), которую ветви функции $x(y)$ не покрывают согласно условию 1° в определении круга Γ_{y_0}. Функция

$$\Phi(p)=\frac{1}{y(p)-y_0}\frac{1}{(x-a)^{\mu}},$$

где x есть проекция p, а μ — произвольное действительное положительное число, непрерывна в $\Delta(p_1, \Gamma_{y_0})$ и имеет в ней однозначный модуль. Во всех точках этой области, проекции которых лежат на дуге окружности с центром в a и радиусом R, выполняется неравенство

$$|\Phi(p)|<\frac{M}{R^{\mu}}.$$

Точно так же в граничных точках области $\bar{\Delta}$ имеем

$$|\Phi(p)|\leqslant\frac{1}{\lambda^{\mu}\rho},$$

где ρ — радиус Γ_{y_0}, а λ — минимум расстояния от a до точек области $\bar{\Delta}_x$, являющейся проекцией $\bar{\Delta}$. Действительно, в точках границы области Δ имеем

$$|y(p)-y_0|=\rho.$$

На основании результатов предыдущего пункта заключаем, что $\bar{\Delta}_x$ — замкнутое множество на плоскости

(x). Поскольку, с другой стороны, точка a выбрана так, чтобы выполнялось условие 1° из определения Γ_{y_0}, то эта точка a лежит вне $\bar{\Delta}_x$. Значит, в вышестоящем неравенстве $\lambda > 0$.

Возьмем теперь *такой достаточно большой* круг (C) с центром в a и радиусом R, чтобы в нем содержалась проекция точки p_1 и чтобы в то же время выполнялось неравенство

$$R^{\mu} > \lambda^{\mu} \rho M.$$

Пусть $\bar{\Delta}_1$ — максимальная подобласть $\bar{\Delta}$, содержащая внутри точку p_1 и проектирующаяся в (C). Граница области $\bar{\Delta}_1$ состоит из части границы области $\bar{\Delta}$ и из точек Δ, проекции которых лежат на окружности круга (C). Согласно результатам предыдущего пункта эта область $\bar{\Delta}_1$ компактна в R_x, так как она не содержит последовательности точек, проекции которых стремятся к бесконечности. С другой стороны, она является множеством, замкнутым в R_x, следовательно, однозначная и непрерывная функция

$$|\Phi(p)|$$

достигает в некоторой точке этой области своего максимума. Поскольку речь идет о модуле аналитической функции, регулярной в окрестности каждой внутренней точки области $\bar{\Delta}_1$, то этот максимум должен достигаться на границе, и тогда всюду в $\bar{\Delta}_1$, и в частности в точке p_1, будем иметь

$$|\Phi(p_1)| = \frac{1}{|y_1 - y_0|} \frac{1}{|x_1 - a|^{\mu}} \leqslant \frac{1}{\lambda^{\mu} \rho}.$$

Следовательно,

$$|y_1 - y_0| \geqslant \frac{\lambda^{\mu} \rho}{|x_1 - a|^{\mu}}.$$

Но так как положительное число μ может быть взято сколь угодно малым, то очевидно, что мы пришли к противоречию, ибо

$$|y_1 - y_0| < \rho.$$

Таким образом, предложение п. 3 доказано.

5. Из доказательства этого предложения становится очевидным, что его можно обобщить на любую точку y, заключенную в Γ_{y_0}, то есть что можно при помощи продолжения, выходящего из точки y_1, оставаясь внутри Γ_{y_0}, приблизиться неограниченно не только к y_0, но и к любой точке внутри Γ_{y_0}. В самом деле, в противном случае приближаемые точки образовывали бы внутри Γ_{y_0} замкнутую область Γ'. Если бы эта область не занимала целиком Γ_{y_0}, то внутри Γ_{y_0} и вне Γ' нашлась бы точка y_0', лежащая столь близко к границе Γ', что можно было бы рассмотреть соответствующий круг Γ_{y_0}', лежащий целиком в Γ_{y_0}. Тогда, применив доказанную теорему, мы получили бы, что можно неограниченно приблизиться к y_0', что приводит к противоречию.

Отсюда следует, что если Γ_{y_0} есть круг, удовлетворяющий условиям 1° и 2° п. 2, то всякий круг, заключенный в Γ_y, снова удовлетворяет тем же условиям относительно своего центра.

6. Из обобщенной таким образом теоремы можно сразу получить свойство (I) для функций, определенных при помощи уравнения (1), аналогично тому, как это делает Иверсен для функций, обратных мероморфным. В самом деле, достаточно заключить заданный путь в конечное число малых кругов Γ_y, что можно осуществить в силу теоремы Бореля — Лебега.

7. Очевидно, что рассмотренные здесь классы функций не исчерпывают всех классов функций, обладающих свойством (I).

Например, функция, обратная модулярной, является функцией Иверсена, не входящей ни в какой из рассмотренных классов. Так как, с другой стороны, суперпозиция функций Иверсена снова является функцией Иверсена, присоединение такой функции к рассмотренному классу расширяет его.

Во втором разделе мы будем заниматься произвольными функциями Иверсена и функциями, им обратными. Отметим, однако, что результат Жюлиа, относящийся к множеству значений, которые не может принимать функция $y(x)$, определенная целым соотношением, является прямым следствием того факта, что функция, обратная

к $y(x)$ (равно как и сама эта функция), есть функция Иверсена.

Этот результат, который Жюлиа вывел из своего анализа и из теоремы Зоретти — Гросса, формулируется следующим образом (там же, стр. 26): множество E точек плоскости (y), для которых уравнение

$$G(x, y) = 0$$

не имеет решения относительно x, есть замкнутое всюду разрывное множество. Во втором разделе мы распространим этот результат на точки y, для которых последнее соотношение обладает не более чем n решениями, где n — произвольное конечное число.

II. Предельные и исключительные значения функций Иверсена

1. Рассмотрим произвольную функцию Иверсена

$$x = x(y)$$

и обратную ей функцию

$$y = y(x),$$

которая не обязана быть функцией Иверсена. Но так как эта функция, вообще говоря, многозначна, то мы будем рассматривать ее на ее римановой поверхности R_x и, обозначая, как и в предыдущем разделе, через p любую точку поверхности R_x будем писать

$$y = y(p),$$

где $y(p)$ имеет в каждой точке p лишь одно определенное конечное или бесконечное значение, представленное точкой на сфере значений y.

Всякую бесконечную последовательность точек p, не имеющую в R_x предельной точки, будем называть *последовательностью, стремящейся к границе* R_x [8]).

[8]) Аналогично тому, как во введении мы расценивали свойство «границы» римановой поверхности быть «всюду разрывной» как эквивалентное, *по определению*, свойству (I), так и здесь будем, по определению, говорить, что для последовательности «стремиться к границе такой поверхности» — значит не иметь на этой поверхности предельной точки. Как в том, так и в другом случае слово «граница» имеет смысл лишь для этих выражений, которые, впрочем, вполне естественны в случае простых типов римановой поверхности.

Очевидно, любая последовательность, на которой $y(p)$ принимает одно и то же значение, является последовательностью, стремящейся к границе R_χ.

Аналогично путь, лежащий на R_χ, будем называть *путем, стремящимся к границе* R_χ, если точка, пробегающая этот путь, в конце концов остается вне любой компактной замкнутой области на R_χ [9]).

Предел $y(p)$, когда p стремится к границе по некоторой последовательности или некоторому пути, называется соответственно *предельным значением* или *асимптотическим значением* $y(p)$. Ясно, что всякое асимптотическое значение является в то же время и предельным значением, тогда как обратное неверно.

Множество (L) предельных значений всегда замкнуто на сфере значений y. Значит, это множество определяет на сфере некоторое число (конечное или счетное) открытых областей Ω_i, не имеющих друг с другом общих точек и составляющих дополнение (L) до сферы. Всякое значение внутри Ω_i принимается функцией $y(p)$ лишь конечное число раз.

2. Сформулировав эти определения, докажем следующую предварительную лемму:

Если y_0 — значение, принимаемое функцией $y(p)$ конечное число n раз, и если в любом круге с центром в y_0 существует значение, принимаемое более чем n раз, то y_0 есть асимптотическое значение функции $y(p)$.

Рассмотрим на R_χ n точек

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$$

(некоторые из них могут совпадать между собой), в которых $y(p)$ принимает значение y_0. Рассмотрим круг γ с центром в y_0 столь малый, чтобы все области

$$\Delta(\gamma,\ q_i) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

определенные точно так же, как в п. 3 предыдущего раздела, были компактны в R_χ. Для каждого q_i в отдельности это возможно, а так как их конечное число, то это возможно одновременно для всех q_i.

---

9) Сюда также относятся замечания, сделанные в предыдущей сноске.

Тогда замыкания $\overline{\Delta}_{q_i}$ каждой из определенных таким образом областей преобразуются при помощи $y=y(p)$ в целый круг $\overline{\gamma}$, причем границы соответствуют граничной окружности круга γ и в каждой из областей $\overline{\Delta}_{q_i}$ уравнение

$$y(p)=b,$$

где b — любая точка внутри γ, имеет одинаковое число решений (зависящее от q_i), каково бы ни было b. Значит, в совокупности областей $\overline{\Delta}_{q_i}$ каждое значение b принимается точно n раз, как и y_0. Но по предположению в γ имеется точка b_0, представляющая значение, принимаемое более чем n раз. Следовательно, вне областей $\overline{\Delta}_{q_i}$ имеется такая точка q', что

$$y(q')=b_0.$$

Так как $x(y)$ есть функция Иверсена, то можно осуществить продолжение элемента (b_0, q'), обратного к элементу q', вдоль пути (λ) внутрь γ вплоть до центра y_0 круга γ. Соответствующий путь (μ) на R_x будет выходить из q' и никогда не сможет войти ни в одну из областей $\overline{\Delta}_{q_i}$, так как их границы имеют своим образом окружность круга γ, которую (λ) не пересекает. Путь (μ) непременно должен оказаться в конце концов вне всякой замкнутой компактной области поверхности R_x, так как в противном случае нашлась бы точка R_x, к которой можно неограниченно приблизиться, что повлекло бы за собой существование вне областей Δ_{q_i} точки, в которой $y(p)$ была бы равна y_0 вопреки нашему предположению. Следовательно, (μ) стремится к границе R_x, и лемма доказана.

3. Отсюда сразу получим несколько следствий.

В любой фиксированной области Ω_i все точки представляют собой значения, имеющие одинаковую кратность.

Действительно, так как точки Ω_i не могут быть асимптотическими значениями, то в окрестности любой из них, скажем y_0, могут находиться лишь точки, представляющие значения той же кратности, что и y_0, так

как элементарные теоремы теории функций показывают, что каждое из значений, близких к y_0, имеет по крайней мере ту же кратность, что и y_0. Следовательно, множество значений $y(p)$ в Ω_i, имеющих одинаковую кратность, открыто. Это показывает, что Ω_i не может быть суммой различных множеств такого рода, разумеется, без общих точек.

4. Второе следствие леммы следующее:

Всякое предельное значение, принимаемое $y(p)$ конечное число раз, есть асимптотическое значение.

Пусть y_0 — такое значение. Так как y_0 является предельным значением, то существует последовательность точек p_m, стремящаяся к границе и такая, что

$$y_0 = \lim_{m \to \infty} y(p_m).$$

В областях $\overline{\Delta}_{q_i}$, определенных в лемме, в данном случае может находиться лишь конечное число точек p_m. С другой стороны, если m достаточно велико, то $y(p_m)$ будет лежать в γ; значит, мы находимся в условиях применимости леммы, так как круг γ может быть взят сколько угодно малым, и заключаем отсюда, что y_0 есть асимптотическое значение.

5. Пусть y_0 — точка из (L), лежащая на границе одной из областей Ω_i (скажем, Ω_1), кратность которой (то есть кратность любого значения функции $y(p)$, принадлежащего Ω_1) равна n.

Я утверждаю, что *в этом случае уравнение*

$$y_0 = y(p)$$

не может иметь более $n-1$ решений.

Как мы уже заметили, это число не может быть больше n. Остается, следовательно, доказать, что оно не может быть равно n.

Обозначив эти решения через q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, построим снова, как в лемме, области $\overline{\Delta}_{q_i}$ для достаточно малого круга γ с центром в y_0. Как и в предыдущем пункте, из того, что y_0 — предельное значение, следует, что вне областей $\overline{\Delta}_{q_i}$ найдется точка p_m, образ которой лежит в γ. Этой точке соответствуют элемент функции

$y(x)$ и обратный к нему элемент функции $x(y)$. Центр этого элемента лежит в γ, а поскольку $x(y)$ есть функция Иверсена, то его можно продолжить вдоль пути (λ), лежащего в γ и стремящегося к определенной точке из γ, которую мы выберем в Ω_1. Путь (μ), соответствующий (λ) на R_x, стремится к границе R_x, так как кратность Ω_1 равна n. Но это означает, что точка, выбранная в Ω_1, является асимптотическим значением, а следовательно и предельным значением, что противоречит предположению.

6. *Случай всюду разрывного (L).* В этом случае всякое значение, не являющееся предельным, принимается одно и то же число n раз, так как дополнение (L) до сферы состоит из одной области Ω. С другой стороны, согласно только что доказанному всякое предельное значение принимается не более чем $n-1$ раз, так как всякая точка из (L) лежит на границе Ω. В то же время все эти значения являются асимптотическими, что следует из п. 4.

Функция $x(y)$ имеет лишь n ветвей. При продолжении одного из ее элементов в Ω не встречаются никакие особенности (кроме полюсов или критических алгебраических точек). Значит, она удовлетворяет соотношению

$$A_0(y)\,x^n + A_1(y)\,x^{n-1} + \ldots + A_n(y) = 0,$$

где $A_n(y)$ однозначны и все их особенности (кроме полюсов) лежат на (L).

Следовательно, $x(y)$ является в этом случае обобщенной алгеброидной функцией.

7. Исключив этот случай, мы покажем, что для любой функции Иверсена $x(y)$ множество (L) занимает всю сферу значений y, то есть что Ω_i не существуют.

Если (L) не будет разрывным, как в предыдущем пункте, то на границе любой области Ω_i обязательно найдется континуум (C). Покажем, что это обстоятельство несовместимо с существованием Ω_i.

В самом деле, пусть Ω — область Ω_i и (C) — континуум, составляющий часть границы области Ω. Пусть n — кратность Ω. В силу п. 5 значения, представленные на (C), принимаются не более чем $n-1$ раз. Пусть $m \leqslant n-1$ — максимальная кратность значений из (C).

Мы покажем, что тогда на (C) существует значение, принимаемое по крайней мере $m+1$ раз, что приведет к противоречию, и таким образом сформулированное предложение будет доказано.

Для этого возьмем снова круг γ с центром в точке y_0, являющейся значением, лежащим на (C) и имеющим кратность m, столь малый, чтобы области $\Delta(\gamma, q_i)$ были компактны в R_x $(i=1, 2, \ldots, m)$.

Пусть b_1 и b_2 — две точки, лежащие на одной и той же окружности γ', внутренней к γ и концентрической с ней, и выбранные в общей части γ' и Ω (общую часть можно всегда предполагать существующей, так как окружность γ', концентрическую с γ, можно выбирать в γ произвольно). Опояшем окружность γ' круговым кольцом, лежащим в γ, и пусть σ_1 и σ_2 — два сегмента этого кольца, определенные при помощи двух радиусов круга γ и содержащие внутри, соответственно, две дуги окружности γ' (пусть γ_1' и γ_2'), соединяющие b_1 и b_2. Сегменты σ_1 и σ_2 соприкасаются своими краями.

Так как b_1 имеет кратность n и $n > m$, то вне $\overline{\Delta}_{q_i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ на R_x найдется такая точка β_1, что

$$b_1 = y(\beta_1).$$

Осуществим продолжение определенного таким образом в b_1 элемента функции $x(y)$ вдоль пути (λ_1), остающегося в σ_1 и идущего из b_1 в b_2, то есть достаточно близкого к γ_1'. Осуществим также продолжение этого же элемента вдоль второго пути (λ_2), остающегося в σ_2 и идущего из b_1 в b_2, то есть достаточно близкого к γ_2'. Два пути (λ_1) и (λ_2) образуют замкнутую кривую, окружающую y_0 и (поскольку круг γ может быть взят сколь угодно малым) непременно имеющую некоторую общую с континуумом (C) точку y_1. Образы кривых (λ_1) и (λ_2) выходят из β_1 и остаются вне $\overline{\Delta}_{q_i}$. На одной из этих кривых имеется точка p_1, образом которой является y_1. Но так как y_1 лежит в γ и уже принимается m раз в областях $\overline{\Delta}_{q_i}$, то, значит, y_i принимается на R_x по крайней мере $m+1$ раз, а так как y_1 принадлежит (C), то это приводит к упомянутому противоречию.

Таким образом, *всякая функция, обратная функции Иверсена, либо имеет в качестве предельного значения относительно ее римановой поверхности любое (конечное или бесконечное) комплексное значение, либо она обратна обобщенной алгеброидной функции.*

8. Отметим аналогию этого предложения с теоремой Вейерштрасса о множестве неопределенности функции в изолированной существенно особой точке. Роль изолированной особой точки играет здесь то, что можно назвать границей римановой поверхности соответствующей функции; функции, обратные алгеброидным, соответствуют рациональным функциям классического случая.

Теорема применима, в частности, к функциям, определенным соотношением

$$G(x, y) = 0. \tag{1}$$

Но так как граница римановой поверхности такой функции может быть очень сложной, то полезно в этом случае уточнить теорему путем дальнейшего приближения к случаю мероморфных функций. Для этого мы докажем, что для всякой функции $y(x)$, удовлетворяющей (1) и не являющейся обратной для алгеброидной функции, любое значение (конечное или бесконечное) есть *предельное значение относительно бесконечности.*

Следовательно, «граница» R_x будет в формулировке заменена «точками на бесконечности» поверхности R_x.

Если b — значение, принимаемое функцией $y(p)$ бесконечное число раз, то это свойство очевидно. Значит, достаточно показать, что всякое значение b, принимаемое конечное число раз, будет асимптотическим значением *в бесконечности*, а не только граничным асимптотическим значением, как это следует из п. 4.

К этому результату приводит рассуждение, аналогичное тому, которое использовалось в подобном случае в первом разделе. Пусть μ — проекция на плоскость (x) пути (μ), лежащего на R_x и являющегося на основании результата п. 4 асимптотическим граничным путем для b. Если бы путь μ не стремился к бесконечности, то в (x) имелся бы круг (C), внутрь которого проектировалось бы бесконечное число различных точек

$$p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$$

пути (μ), стремящихся к границе R_x. Пусть X — предельная точка проекций p_m в (C). Как и в первом разделе, показывается, что это влечет за собой существование элемента (b, X) функции $x(y)$, который является предельной точкой для p_m. Мы пришли к противоречию, так как p_m принадлежат пути (μ), стремящемуся к границе R_x, и сами стремятся к этой границе.

Следовательно, одновременно с теоремой Вейерштрасса мы распространили на функции, определенные при помощи соотношения (1), следующее предложение Иверсена[10]): всякое значение, имеющее конечную кратность, есть асимптотическое значение, соответствующее бесконечности.

9. В качестве дополнения к теореме п. 7 исследуем природу множества значений y, которые $y(p)$ принимает лишь конечное число раз на R_x, то есть исключительных значений в смысле Пикара для функций, обратных функциям Иверсена.

Известно, что это множество состоит не более чем из двух точек для функций, мероморфных во всей конечной плоскости, и из конечного числа точек (связанного со степенью) для алгеброидных функций[11]). Мы покажем, что в случае функций, обратных самым общим[12]) функциям Иверсена, это множество является суммой не более чем счетного множества замкнутых всюду разрывных множеств, то есть множеством, являющимся в некотором роде вдвойне разреженным. (Плоское множество первой категории в смысле Бэра является разреженным множеством.) Для этого достаточно доказать следующее предложение, которое в случае $n=0$ дает результат, изложенный Жюлиа в цитированной работе:

Множество E_n точек y, представляющих значения, принимаемые не более n раз (n конечно), есть замкнутое всюду разрывное множество.

Мы уже замечали неоднократно, что каждое из значений, близких к n-кратному, принимается по крайней

[10]) Iversen, там же, стр. 23.

[11] Распространение теоремы Пикара на алгеброидные функции принадлежит Ремундосу.

[12]) Функции, обратные обобщенным алгеброидным, естественно, исключаются.

мере n раз, так что множество E_n, очевидно, замкнуто. Остается лишь доказать, что E_n не может содержать континуума.

Рассуждение, подобное тому, которое служило для доказательства результата п. 7, покажет нам, что если бы E_n содержало континуум, то на E_n можно было бы найти значение, принимаемое более чем n раз, что противоречило бы определению E_n.

Пусть, в самом деле, E_n — первое из множеств E_0, E_1, ..., содержащее континуум, который мы обозначим через (C). На (C) найдется по крайней мере одна точка y_0, представляющая значение, принимаемое точно n раз, так как в противном случае E_n не было бы множеством с наименьшим индексом из последовательности E_0, E_1, E_2, ..., не являющимся всюду разрывным. Для y_0 и достаточно малого круга γ с центром в y_0 построим, как и в лемме, области $\bar{\Delta}_{q_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Так как y_0 — предельное значение, то вне $\bar{\Delta}_{q_i}$ можно найти такую точку β_1, чтобы точка

$$y(\beta_1)=b_1$$

лежала внутри γ. Тогда β_1 и b_1 будут играть ту же роль, что и величины, обозначенные теми же символами в п. 7. В качестве b_2 возьмем точку, лежащую на окружности γ' с центром в y_0, проходящей через b_1. Так как (C) не может содержать область, то y_0 есть граничная точка (C), и можно предположить, что γ' содержит точки, не принадлежащие (C). Возьмем в качестве b_2 такую точку. Далее рассуждение проводится так же, как и выше, и приводит к существованию точки на (C), представляющей значение, принимаемое $n+1$ раз, что противоречит определению (C) как части (E_n).

10. Легко построить пример функции Иверсена, которая в точках, образующих множество E, плотное в плоскости и являющееся суммой счетного числа совершенных всюду разрывных множеств, имеет лишь конечное число значений, в то время как в остальных точках плоскости (y) она бесконечнозначна.

Рассмотрим в плоскости (y) прямые D_i $(i=1, 2, \ldots)$, параллельные действительной оси и имеющие отличные

от нуля рациональные ординаты. На D_i построим совершенное всюду разрывное множество P_i, все смежные интервалы которого меньше $1/i$. Рассмотрим теперь риманову поверхность функции $\log y$. Разрежем ее на листы вдоль положительной части действительной оси и пронумеруем эти листы в порядке удаления от некоторого листа, выбранного среди них в качестве первого. Для каждого n из n-го листа удалим множество

$$P_1+P_2+\ldots+P_n.$$

То, что остается при этом от римановой поверхности функции $\log y$, снова является некоторой римановой поверхностью R_y. Но известно, что существует однозначная на R_y функция

$$x=x(y),$$

риманова поверхность которой совпадает с R_y. Эта функция, очевидно, есть функция Иверсена, и в точках P_n она имеет $n-1$ значений, имея бесконечное число значений во всех точках вне $\sum\limits_i P_i$.

В неоднократно цитированной работе Жюлиа [13]) содержится пример функции, определенной посредством целого соотношения, для которой сумма

$$E_0+E_1+\ldots+E_n+\ldots$$

является множеством, всюду плотным в плоскости. Остается открытым вопрос, может ли это множество иметь для такой функции мощность континуума. Мы видели, что для общих функций Иверсена этот вопрос не представляет никакой трудности.

---

[13]) G. Julia, там же, стр. 36.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ГРАНИЦА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ГАРМОНИЧЕСКУЮ МЕРУ НУЛЬ*)

Первое обобщение классической теоремы Вейерштрасса о поведении однозначной функции в окрестности изолированной существенно особой точки было дано в 1905 г. Помпейю [1]). Оно заключается в том, что однозначная функция в области, где она имеет множество E особых точек (кроме полюсов) *линейной меры нуль,* в окрестности любой точки множества E принимает значение, сколь угодно близкое к любому заданному значению. Позже эта теорема была независимо найдена Безиковичем [2]).

В предыдущей работе, помещенной в этом журнале [3]), я исследовал класс многозначных аналитических функций $w=f(z)$, характеризующихся тем свойством, что обратная функция $z=\varphi(w)$ обладает римановой поверхностью, граница которой может рассматриваться как «всюду разрывная». Более точно это означает, что если на плоскости (w) задан произвольный элемент e функции $\varphi(w)$ и любой путь λ, выходящий из центра элемента e, то можно всегда осуществить аналитическое

*) Впервые опубликовано в журнале «Mathematica» (Клуж), т. XIX, 1943, стр. 126—138.

[1]) D. Pompeiu, Sur la continuité des fonctions de variables complexes. Диссертация, Париж, 1905, стр. 39—43; Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1905.

[2]) A. Bésicovitch, Proc. of London Mathem. Society (2), **32**, 1930, стр. 1—9.

[3]) S. Stoïlow, Mathematica **12**, 1936, стр. 123—138. См. приложение I к настоящей книге.

продолжение элемента e вдоль пути, сколь угодно близкого к λ и имеющего с λ общие концы [свойство Иверсена, или свойство (I)][4]. Как было установлено, существует лишь две возможности: либо функция $w=f(z)$ в окрестности границы ее римановой поверхности удовлетворяет теореме Вейерштрасса, либо $z=\varphi(w)$ есть корень многочлена от z, коэффициентами которого являются функции от w, однозначные во всей плоскости и имеющие не более чем всюду разрывное множество особенностей[5].

Цель настоящей работы — показать, как это общее предложение связано с упомянутой теоремой Помпейю и Безиковича. Соображения, которые представляются нам существенными, заставляют нас в какой-то степени сузить рамки теоремы, заменив в ней линейную меру *мерой гармонической*[6]. Помимо того, что довольно затруднительно распространить линейную меру на границу любой римановой поверхности, это понятие неудобно еще и тем, что линейная мера не является конформным инвариантом. Напротив, понятие гармонической меры, введенное Р. Неванлинна[6], вполне естественно распространяется на границу (идеальную) римановой поверхности. Особый интерес к классу поверхностей, граница которых имеет нулевую гармоническую меру, вызван, несомненно, замечательными результатами, которые Неванлинна уже получил недавно в этом направлении[7].

Несколько общих определений

1. Риманова поверхность R, *накрывающая комплексную плоскость* (z), определяется при помощи двумерного топологического многообразия V и *внутреннего*

---

[4]) F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions meromorphes. Диссертация, Хельсинки, 1914, стр. 24; здесь теорема доказана для функций, указанных в заглавии.

[5]) С. Стоилов, там же, стр. 135. В последнем случае $\varphi(w)$ называется *обобщенной алгеброидной функцией*.

[6]) Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М. — Л., 1941, стр. 32.

[7]) R. Nevanlinna, Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Manigfaltigkeit (Ann. Acad. Sc. Fenniciae, Хельсинки, 1941).

отображения (T) многообразия V на плоскость (z) или на часть этой плоскости [8]). Точка p поверхности R определяется как пара, образованная точкой из V и ее образом (ее «проекцией») на (z). Так как отображение (T) однозначно, то p полностью определяется заданием соответствующей точки из V.

Топология в R та же, что и в V. Метрика в R вводится перенесением на V при помощи отображения (T) метрики плоскости (z). Мы предполагаем здесь, что R метризована при помощи евклидовой метрики плоскости (z), определяемой параметром z в окрестности каждой точки. Если в качестве V взять многообразие, точками которого служат элементы (правильные, дробные и алгебраические) аналитической функции f, а в качестве (T) — отображение, которое каждому элементу ставит в соответствие центр его круга сходимости на (z), то получится риманова поверхность R_f *заданной аналитической функции* f. Следовательно, точка поверхности R_f определяется как пара, состоящая из элемента продолжения функции f и его центра на (z).

Точки римановых поверхностей R_f и R_φ, где φ — функция, обратная к f, взаимно однозначно соответствуют друг другу, как элементы f и φ.

2. Если понимать *границу* в топологическом смысле, то граница поверхности R будет той же, что и граница многообразия V. Напомним ее определение [9]). Рассмотрим на V последовательность замкнутых областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n, \ldots$, удовлетворяющую следующим условиям:

1° Граница в V каждой области Δ_n состоит из единственной простой замкнутой кривой.

2° Для любого n имеет место включение $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$.

3° Общая часть областей $\{\Delta_n\}$ пуста.

---

[8]) S. Stoïlow, Sur la definition des surfaces de Riemann. Международный математический конгресс, Осло, 2, 1936, стр. 143. См. настоящую книгу, стр. 54 и 151. См. также L. Ahlfors, Geometrie der Riemannschen Flächen, Конгресс в Осло, 1, стр. 240. Отображение называется *внутренним*, если оно непрерывно и переводит открытые множества в открытые, а компактные континуумы, отличные от точки, преобразует снова в компактные континуумы, отличные от точки.

[9]) Настоящая книга, стр. 112 и далее.

Такая последовательность называется *определяющей последовательностью*. Она определяет *граничный элемент* многообразия V. Две определяющие последовательности $\{\Delta_n\}$ и $\{\Delta'_n\}$ эквивалентны и определяют один и тот же граничный элемент, если для любого n существует такое число m, что $\Delta'_m \subset \Delta_n$.

Можно проверить, что это свойство взаимно. Множество граничных элементов образует *границу* (*идеальную*) *многообразия* V.

Известно, что на V существует последовательность $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ (где $P_n \subset P_{n+1}$) аппроксимирующих областей многообразия V, замкнутых и компактных в V, каждая из которых ограничена конечным числом замкнутых кривых без общих точек (контуров), такая, что последовательность множеств $\overline{V - P_n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) содержит определяющую последовательность для любого граничного элемента V[10]).

Так как соответствие между точками V и точками R взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то областям P_n на R соответствуют римановы области F_n, обладающие относительно R точно такими же свойствами, что и P_n относительно V. Можно даже предположить, что каждый из контуров F_n состоит из конечного числа дуг, проектирующихся на (z) в аналитические дуги, так как для этого достаточно в случае надобности бесконечно мало изменить контуры P_n, что, очевидно, никак не влияет на основные свойства последних.

Следовательно, риманова поверхность R получается исчерпанием конечными римановыми областями F_n, когда $n \to \infty$.

3. Действительную функцию, непрерывную в некоторой области на R, будем называть *гармонической в этой области*, если она является гармонической относительно параметра z в окрестности каждой точки области, не являющейся точкой ветвления R.

Для любого n существует функция, гармоническая внутри $\overline{F_n - F_0}$, непрерывная в $\overline{F_n - F_0}$ и принимающая на контурах Γ_n области F_n значение *единица*, а на контурах

---

[10]) Настоящая книга, стр. 116 и далее.

Γ_0 области F_0 значение *нуль*. Пусть $\omega(\Gamma_n, p, F_n)$ — значение этой функции во внутренней точке p множества $\overline{F_n - F_0}$. Пусть p_0 — некоторая фиксированная точка в $\overline{F_n - F_0}$; тогда свойства гармонических функций показывают, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(\Gamma_n, p_0, F_n)$ существует, конечен и неотрицателен. Более того, его значение не зависит от выбранной последовательности $\{F_n\}$ (а значит, и от последовательности $\{P_n\}$). Этот предел называется *гармонической мерой относительно F_0 в точке p_0* границы R[11]. Гармоническая мера инвариантна относительно конформных отображений R.

На основании того, что гармоническая мера границы заданной римановой поверхности в случае, когда она равна нулю, не зависит от выбора областей P_n (соответственно F_n), равно как и от выбора точки p_0, можно говорить о римановых поверхностях, граница которых имеет нулевую гармоническую меру, не уточняя элементы, входящие в $\omega(\Gamma_n, p_0, F_n)$. Такие римановы поверхности, а также соответствующие им аналитические функции мы и будем теперь рассматривать.

Исследование поведения в окрестности особых точек аналитических функций, граница римановых поверхностей которых имеет нулевую гармоническую меру

1. Прежде всего докажем следующее вспомогательное предложение:

Всякая аналитическая функция $w=f(z)$, граница римановой поверхности R_f которой имеет нулевую гармоническую меру, обратна функции, обладающей свойством Иверсена[12]*)*.

Для доказательства того, что функция $z=\varphi(w)$, обратная к $w=f(z)$, обладает свойством (I), достаточно показать, что если w_0 — любая точка плоскости (w) и C — круг с центром в этой точке, то всякий элемент

[11]) Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, стр. 117.

[12]) В моей работе, цитируемой в начале этой статьи, я назвал функции, обладающие свойством (I), функциями Иверсена.

функции $\varphi(w)$, проектирующийся внутрь C, можно аналитически продолжить, не выходя из C, вплоть до любой окрестности точки w_0 [13]).

Очевидно, можно предположить, что $w_0=\infty$ и что, следовательно, C есть внешность некоторого круга K с центром в начале; к этому случаю легко перейти при помощи очень простого отображения. Тогда элемент функции $\varphi(w)$ (который мы будем обозначать соответствующей ему точкой q_0 римановой поверхности R_φ) будет проектироваться во внешность K. Пусть p_0 — точка, соответствующая q_0 на R_f. Множество D всех точек p из R_f, которых можно достичь при аналитическом продолжении элемента p_0 функции $f(z)$ так, чтобы аналитическое продолжение, соответствующее элементу q_0 функции $\varphi(w)$, осуществлялось вне K, образует на R_f открытую область. Если r означает радиус K, то на границе замкнутой области $\bar{D}$ будем иметь $|f(p)|=r$.

Предположим сначала, что $\bar{D}$ компактна в R_f. Тогда ее образ $f(\bar{D})$ замкнут в (w), а так как он лежит вне K, то необходимо, чтобы этот образ занимал всю часть $|w|\geqslant r$ плоскости (w), так как в противном случае D не была бы максимальной областью, в которую можно продолжить p_0 указанным образом. Но тогда $f(\bar{D})$ содержит точку $w=\infty$, и теорема доказана.

Предположим, следовательно, что D не компактна в R_f. Если функция $|f(p)|$ не ограничена в $\bar{D}$, то множество $f(\bar{D})$ не ограничено на (w), и теорема снова доказана. Значит, достаточно показать, что $|f(p)|$ не может быть ограниченной в $\bar{D}$.

Функция $|f(p)|$ является действительной и непрерывной в D, и так как $|f(p)|\geqslant r>0$ в D, то функция $u(p)=$ $=\log|f(p)|$ является непрерывной в $\bar{D}$ и гармонической в D в смысле п. 3 предыдущего раздела.

Если $|f(p)|$ ограничена в $\bar{D}$, то такой же будет и $u(p)$. Пусть k — верхняя грань $u(p)$ в этой области. На всей границе области $\bar{D}$ в R_f имеет место равенство $u(p)=\log r<k$.

---

[13]) В самом деле, так как путь λ может быть заключен в конечное число кругов достаточно малого радиуса, то отсюда сразу вытекает сформулированное выше утверждение.

Рассуждение, принадлежащее в основе Р. Неванлинна [14]), который изложил его для случая обычной гармонической функции в плоской области, легко может быть перенесено на случай римановой области $\overline{D}$ и показывает, что $|f(p)|$ не может быть ограниченной в этой области

Так как точка p_0 лежит внутри $\overline{D}$, то, очевидно,

$$u(p_0) > \log r, \tag{1}$$

а так как на границе $\overline{D}$ имеем $u(p) = \log r$, то внутри $\overline{D}$ существует такая точка p_1, что

$$\log r < u(p_1) < u(p_0). \tag{2}$$

Пусть μ — такое положительное число, что

$$u(p_1) < \mu < u(p_0). \tag{3}$$

Вокруг p_1 построим такую жорданову область δ, чтобы на δ (включая ее границу) имело место неравенство

$$u(p) \leqslant \mu. \tag{4}$$

В последовательности аппроксимирующих областей поверхности R_f, обозначенных в предыдущем разделе через $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, возьмем в качестве F_0 область δ. Так как предполагается, что гармоническая мера границы R_f равна нулю, то можно выбрать такое достаточно большое n, чтобы для любого положительного ε имело место, в принятых выше обозначениях, неравенство

$$\omega(\Gamma_n, p_0, F_n) < \varepsilon,$$

где p_0 — та же точка, что и в соотношении (1). В самом деле, p_0, в силу (3) и (4), лежит вне $F_0 = \delta$ и, очевидно, внутри $\overline{F_n - F_0}$ для достаточно большого n.

Теперь, следуя Неванлинна, рассмотрим функцию

$$v(p) = u(p) - \log r - (k - \log r)\,\omega(\Gamma_n, p, F_n),$$

которая будет гармонической внутри множества $(\overline{F_n - \delta})\,\overline{D}$ и непрерывной на всем этом множестве.

---

[14]) Р. Неванлинна, там же, стр. 143.

Пусть D_0 — максимальная область, лежащая в $\overline{(F_n - \delta)}\,\overline{D}$ и содержащая внутри точку p_0. Все граничные точки области $\overline{D}_0$ будут лежать на контуре γ области δ, на Γ_n или на границе $\overline{D}$.

На γ, по предположению, имеет место (4), в то время как $\omega(\Gamma_n, p, E_n)$ на γ равно нулю, так как это граница F_0 (см. предыдущий раздел). Следовательно, на γ имеем

$$\nu(p) \leqslant \mu - \log r. \tag{5}$$

На Γ_n, по определению, всегда $\omega(\Gamma_n, p, F_n) \equiv 1$, а так как в $\overline{D}$, а значит и в D_0, $u(p) \leqslant k$, то имеем на Γ_n

$$\nu(p) \leqslant 0. \tag{6}$$

На границе области $\overline{D}$ справедливо равенство $u(p) = \log r$. Следовательно, на этой части границы $\overline{D}_0$ соотношение (6) сохраняется, так как значения $\omega(\Gamma_n, p, F_n)$ всюду в $\overline{F_n - \delta}$ лежат в интервале (0, 1) и $k > \log r$.

Отсюда, учитывая, что в силу (2) и (3) $\mu - \log r > 0$, заключаем, что соотношение (5) имеет место на всей границе $\overline{D}_0$.

Но $\nu(p)$ непрерывна в $\overline{D}_0$. Поскольку $\overline{D}_0$ компактна и замкнута в R_f, функция $\nu(p)$ достигает своего максимума, который лежит на границе $\overline{D}_0$, так как $\nu(p)$ гармоническая внутри $\overline{D}_0$. Следовательно, *во всей* области $\overline{D}_0$ справедливо неравенство (5) и, в частности, поскольку p_0 лежит в $\overline{D}_0$, справедливо соотношение

$$u(p_0) < \mu + (k - \log r)\,\omega(\Gamma_n, p_0, F_n) < \mu + (k - \log r)\,\varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то, устремив $n \to \infty$, получим

$$u(p_0) \leqslant \mu,$$

что противоречит (3).

Таким образом, наша теорема полностью доказана.

2. Применяя упомянутый выше общий результат, относящийся к функциям, обратным функциям Иверсена, получаем, таким образом, что *всякая аналитическая функция, граница римановой поверхности которой имеет нулевую гармоническую меру, содержит в качестве*

предельного значения, соответствующего этой границе[15]), *любое заданное значение, если только она не является обратной к обобщенной алгеброидной функции* (см. сноски [3]) и [5]) в первом разделе).

Но граница поверхности R_f, как мы только что видели, состоит из граничных элементов. Мы уточним этот результат, рассматривая поведение функции $f(z)$ в окрестности каждого элемента границы поверхности R_f.

3. Окрестности граничных элементов. Так как граничный элемент α многообразия V определяется при помощи любой из своих определяющих последовательностей, то *окрестностью* α называется внутренность любой из областей Δ_n, принадлежащей одной из таких последовательностей.

Обратно, говорят, что α_n находится *внутри* Δ (или что α *содержится в* Δ), если Δ есть область, принадлежащая некоторой последовательности, определяющей элемент α.

Последовательность точек p_n из V стремится к α, если для достаточно больших n все p_n находятся внутри произвольной окрестности Δ элемента α. Путь, лежащий на V, стремится к α, если он, начиная с некоторого момента, войдя в произвольную окрестность Δ элемента α, уже не выходит за ее пределы.

Окрестности граничных элементов римановой поверхности R, определяемой при помощи многообразия V и отображения (T), будут в свою очередь определены окрестностью Δ граничного элемента V и ее проекцией на (z) посредством (T). Поэтому окрестности граничных элементов поверхности R можно обозначать через Δ, так как этого достаточно для их определения, если задана поверхность R [а значит, и отображение (T)].

Такая окрестность называется *простой* (schlicht), если отображение (T) является топологическим в Δ. Если граничный элемент α поверхности R_f обладает простой окрестностью, то функция f однозначна

---

[15]) Последовательность точек V *стремится к границе* V, если эта последовательность бесконечна и не имеет ни одной предельной точки в V. Предельными значениями, соответствующими границе, являются предельные значения, соответствующие таким последовательностям.

в этой окрестности (или, как еще говорят, однозначна около α).

4. Особые точки. Путь λ, лежащий на V и стремящийся к граничному элементу α многообразия V, отображением (T) переводится в путь $\overline{\lambda}$ на (z), который может как стремиться к определенной точке плоскости (z), так и не стремиться ни к какому пределу. В первом случае говорят, что эта точка есть *особая точка* поверхности R_f, равно как и всякой функции f, для которой R_f является римановой поверхностью [16]).

Из этого определения ясно, что особые точки аналитической функции зависят (во всяком случае, их положение) только от самой римановой поверхности этой функции [17]). Более того, очевидно, что одному и тому же граничному элементу α может соответствовать несколько и даже бесконечное число особых точек. С другой стороны, могут найтись граничные элементы, которым не соответствует никакая особая точка. Так, функция, обратная мероморфной, не имеет в $|z| < \infty$ ни одной особой точки, если мероморфная функция не имеет ни одного асимптотического значения. Таков, например, случай эллиптического интеграла первого рода, который имеет лишь алгебраические особенности [16]). Однако риманова поверхность такой функции имеет один (и только один) граничный элемент, а именно, элемент, соответствующий точке $z = \infty$ мероморфной функции.

5. На окрестности граничных элементов можно распространить результат п. 2, восстановив с некоторыми дополнениями и замечаниями рассуждения из моей цитируемой выше работы 1936 г.

Пусть $L(\Delta)$ — множество предельных значений функции $f(p)$, соответствующих элементам α, содержащимся в Δ. Это — предельные значения функции $f(p_n)$, когда p_n стремится к любому из этих элементов при $n \to \infty$.

Множества $L(\Delta)$ замкнуты в комплексной плоскости (w). Пусть Γ — образ на (w) граничной кривой области Δ,

---

[16]) В это определение, очевидно, не входят алгебраические особые точки: это точки, лежащие внутри R_f.

[17]) *Природа* особенности, естественно, будет зависеть от самой функции f и может быть различной для двух разных функций, соответствующих одной и той же римановой поверхности.

полученный при отображении $w=f(p)$, где p — произвольная точка поверхности R_f. Множество $\Gamma+L(\Delta)$ замкнутое в (w), определяет на (w) дополнительные области Ω, каждая из которых состоит из значений, не являющихся предельными в Δ, то есть из значений, принимаемых функцией $f(p)$ в Δ не более конечного числа раз. В каждой из областей Ω это число одно и то же для всех точек этой области Ω.

Пусть Ω_0 есть та область Ω, в которой, если она существует, это число равно нулю (*лакунарная* область для f *в* Δ). Прежде всего я утверждаю, что всякая граничная точка w_0 области Ω_0 непременно лежит на Γ. Если бы это было не так, то w_0 можно было бы окружить малым кругом δ, не имеющим с Γ общих точек. Так как точка w_0 лежит на $\Gamma+L(\Delta)$, то, по нашему предположению, она должна лежать на $L(\Delta)$ и, значит, является предельной точкой, соответствующей определенному граничному элементу, заключенному в Δ. Следовательно, в Δ существует такая точка p_1, что $w_1=f(p_1)$ лежит внутри δ. Обозначим через $\Delta(\delta, p_1)$ максимальную область, состоящую из точек, достижимых посредством выходящего из p_1 (на R_f) пути, образ которого остается внутри δ. Область $\Delta(\delta, p_1)$ должна целиком лежать в Δ, так как круг δ лежит целиком вне Γ, являющегося образом границы Δ. Но так как в силу установленного выше функция $\varphi(w)$ [обратная к $f(z)$] есть функция Иверсена, то элемент q_1 функции $\varphi(w)$, соответствующий p_1, может быть продолжен внутрь δ вплоть до окрестности любой точки внутри этого круга. Так как соответствующие пути на R_f остаются в $\Delta(\delta, p_1)$, то они будут оставаться также в Δ, откуда следует, что δ состоит лишь из значений, принимаемых в Δ, или из пределов таких значений. Тогда очевидно, что точка w_0, являющаяся центром δ, не может лежать на границе лакунарной области Ω_0, ибо это противоречит ее определению. Значит, любая граничная точка w_0 области Ω_0 будет лежать на Γ.

Теперь я утверждаю, что w_0 *не может лежать на* $L(\Delta)$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно бесконечно мало уменьшить область Δ в окрестности точек $f^{-1}(w_0)$ границы Δ, так, чтобы для уменьшенной области

$\Delta' \subset \Delta$ снова имело место $L(\Delta') \equiv L(\Delta)$, но чтобы образ Γ' границы Δ' не проходил больше через w_0. Тогда точка w_0 не может лежать вне новой лакунарной области Ω_0' (которая получается из Ω_0 расширением). Более того, поскольку Γ' не проходит через w_0, она не может лежать на границе Ω_0', так как это противоречило бы только что доказанному утверждению. Значит, точка w_0 лежит *внутри* Ω_0' и, следовательно, не может лежать на $L(\Delta') \equiv L(\Delta)$.

6. Благодаря этому факту мы можем применить к области Δ, невзирая на наличие множества Γ на (w), рассуждения, которые в цитированной работе применялись к целой римановой поверхности R_f.

Пусть E — множество, дополнительное к лакунарным областям Ω_0. Множество E состоит из всех значений, принимаемых функцией $f(p)$ в Δ, и их предельных значений. Очевидно, что E — замкнутая область; в силу доказанного выше вся ее граница лежит на Γ, а $L(\Delta)$ лежит целиком внутри E.

Пусть Ω_1 — не лакунарная область Ω, являющаяся поэтому частью E. Пусть w_1 — граничная точка этой области, лежащая внутри E и такая, что через нее проходит континуум, составляющий часть $L(\Delta)$, образованную граничными точками области Ω_1.

Не изменяя множества $L(\Delta)$, можно в случае надобности бесконечно мало уменьшить область Δ точно так же, как это было сделано выше, для того чтобы кривая Γ не проходила через w_1. Тогда наши рассуждения из упомянутой работы *) применимы без изменений к области Δ; нужно лишь взять круги γ вокруг w_1 столь малыми, чтобы Γ оставалась вне γ, что возможно, так как Γ не проходит через w_1. Тогда все пути, проведенные на Δ и соответствующие различным путям (λ), лежащим внутри γ, не смогут выйти из Δ и должны будут стремиться к граничному элементу, заключенному в Δ, если они стремятся к границе R_f. Отсюда, как и в цитируемой статье, заключаем, что существование на границе Ω_1 континуума, составляющего часть $L(\Delta)$, несовместимо с

*) См. приложение I, стр. 193—200.

существованием Ω_1, и, значит, либо множество $L(\Delta)$ всюду разрывно, либо оно покрывает все E.

В этом последнем случае E не может иметь границы, так как мы видели, что $L(\Delta)$ не достигает этой границы. Следовательно, в этом случае нет лакунарных областей и E покрывает всю плоскость (w), то есть $L(\Delta)$ совпадает с плоскостью (w). Значит, в окрестности Δ граничных элементов α, принадлежащих этой окрестности, функция удовлетворяет теореме Вейерштрасса.

В случае, если множество $L(\Delta)$ всюду разрывно, можно лишь, как и в предыдущей работе, заключить, что $z=\varphi(w)$ есть обобщенная алгеброидная функция, так как если E содержит лишь одну область Ω, то она может включать в себя точки, являющиеся предельными значениями для других граничных элементов поверхности R_f, не содержащихся внутри Δ. Однако всякий путь, стремящийся к граничному элементу α, заключенному в Δ, определяет путь на R_f, и соответствующее ему асимптотическое значение, являющееся точкой из $L(\Delta)$, всегда одно и то же для одного и того же элемента α независимо от пути, стремящегося к α. Отсюда следует, что особые точки $f(z)$, соответствующие граничным элементам, заключенным в Δ, суть обыкновенные трансцендентные точки, если они существуют [18]).

В итоге заключаем, что для всякой функции $w=f(z)$, граница римановой поверхности которой имеет нулевую гармоническую меру, можно различать два типа областей Δ (окрестностей граничных элементов):

1° Области *первого рода*, в которых функция приближается как угодно близко к любому заданному значению: $L(\Delta)$ занимает всю комплексную плоскость (w).

2° Области *второго рода*, в которых имеются лишь граничные элементы, соответствующие обыкновенным трансцендентным особым точкам: $L(\Delta)$ всюду разрывно.

Заметим, что всякая *простая* окрестность Δ может быть лишь первого рода, так как R_f есть риманова поверхность функции f. В самом деле, тогда f однозначна в Δ, а поскольку множество ее особенностей в Δ имеет

---

[18]) Выше было показано, что некоторые граничные элементы могут не соответствовать никакой особой точке.

нулевую гармоническую меру, то теорема Помпейю и Безиковича показывает, что в окрестности каждой особой точки множество неопределенности совпадает со всей плоскостью [19]).

7. Рассмотрим особо случай, когда *все* окрестности Δ поверхности R_f — области второго рода. Существование аппроксимирующих областей $\{F_n\}$ показывает, что можно ограничиться рассмотрением только тех областей Δ, которые являются компонентами $R_f - F_n$, причем их число всегда конечно для любого n. Таким образом, получим счетное множество областей, при помощи которых получаются определяющие последовательности для любого граничного элемента R_f. Пусть G_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — эти области и $L(G_i)$ — соответствующие множества предельных значений. Если L есть множество всех предельных значений (предельное множество, соответствующее целой границе поверхности R_f), то

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} L(G_i).$$

Так как все области Δ — второго рода, то L, являющееся суммой счетного числа замкнутых всюду разрывных множеств, не содержит никакого отличного от точки континуума. Но L замкнуто, поэтому имеется лишь одна область Ω, соответствующая всей границе, и очень простое рассуждение, аналогичное проведенному в упомянутой выше статье, показывает, что тогда функция, обратная к f, является обобщенной алгеброидной функцией.

8. Итак, можно сформулировать следующую теорему:

Если задана аналитическая функция $w = f(z)$, граница римановой поверхности R_f которой имеет нулевую гармоническую меру, то в любой окрестности Δ произвольного граничного элемента поверхности R_f функция $f(z)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий: либо $f(z)$ сколь угодно близко приближается к любому заданному значению, либо в Δ имеются лишь граничные элементы, соответствующие обыкновенным трансцендентным особым точкам функции $f(z)$.

---

[19]) Всякое плоское множество гармонической меры нуль имеет и линейную меру нуль, в то время как обратное неверно (см. цитируемую выше книгу Р. Неванлинна).

Если все окрестности Δ удовлетворяют последнему условию, то функция имеет лишь обыкновенные трансцендентные особые точки и обратная ей функция $z=\varphi(w)$ является обобщенной алгеброидной.

Это предложение представляет собой обобщение на случай многозначных функций теоремы, которая упоминалась в начале этой работы. Ясны причины, в силу которых случай областей Δ второго рода не может представиться для однозначных функций; в самом деле, в этом случае, если множество особенностей имеет гармоническую меру нуль, не существует ничего, аналогичного обыкновенным трансцендентным особым точкам.

С некоторыми изменениями в формулировке наша теорема может быть распространена на любые функции $f(z)$, однозначные на поверхности R и имеющие всюду на этой поверхности характер рациональной функции, причем собственно риманова поверхность функции $f(z)$ может простираться и за пределы R. В этом случае для $f(z)$ могли бы существовать *простые* области Δ второго рода, но тогда содержащиеся в подобных областях Δ граничные элементы R уже не были бы особенностями для функции, которая при помощи аналитического продолжения в Δ может быть распространена за пределы R.

Замечания о лакунарных значениях рассматриваемых функций

1. Значения, не принимаемые функцией $w=f(z)$, образуют на (w) всюду разрывное замкнутое множество. В своей книге (стр. 144—145) Р. Неванлинна показал, что для однозначных функций, имеющих множество особенностей нулевой гармонической меры, множество лакунарных значений имеет гармоническую меру нуль; его рассуждение после изложенного в предыдущем разделе без изменений применимо к рассматриваемым здесь многозначным функциям и приводит к тому же результату.

Существенным свойством функций $f(z)$, позволившим нам сформулировать общую теорему, подытожившую проведенные выше исследования, является то, что эти функции обратны функциям Иверсена. Этот последний класс функций был охарактеризован в топологических

терминах. Очевидно, однако, что только что сформулированное метрическое свойство не может принадлежать всем функциям этого класса. Действительно, любая функция, обратная к функции Иверсена, всегда имеет в качестве лакунарного множества замкнутое всюду разрывное множество, но оно может даже иметь положительную плоскую меру (см. Mathematica, т. XII, стр. 138) *).

Для однозначных функций, множество особых точек которых имеет линейную меру нуль, М. Л. Картрайт доказала, что плоская мера лакунарного множества всегда равна нулю [20]. Это является следствием того факта, что в окрестности каждой из своих особых точек такая функция не может оставаться ограниченной.

2. Известно, что всякое лакунарное значение однозначной функции вблизи изолированной существенно особой точки есть асимптотическое значение, соответствующее этой точке. Картрайт распространила это предложение на однозначные функции, множество особенностей которых имеет гармоническую меру нуль [21]: лакунарное значение, соответствующее окрестности заданной точки, принадлежащей этому множеству, есть асимптотическое значение, соответствующее особой точке, сколь угодно близкой к заданной.

Это предложение остается справедливым для многозначных функций, граница римановых поверхностей которых имеет нулевую гармоническую меру. Оно верно (что можно было предвидеть, учитывая топологический характер рассматриваемого свойства) даже в общем случае функций, обратных функциям Иверсена, если только заменить в формулировке «особую точку» на «граничный элемент» римановой поверхности. В самом деле, достаточно снова применить с указанными выше изменениями рассуждения моей статьи 1936 г.

---

*) См. приложение I, стр. 200.

[20]) M. L. Cartwright, Quarterly Journal of Mathematics 8, 1937, стр. 303—307.

[21]) M. L. Cartwright, Journal of London Mathem. Society 11, 1936, стр. 303—306. См. сноску на стр. 303.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ЗАМЕЧАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСОБЫХ ТОЧЕК МНОГОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ *)

Множество особых точек однозначной функции (неалгебраических особых точек) зависит лишь от естественной области существования функции, то есть множество одно и то же для всех функций, соответствующих некоторой фиксированной области. Его можно определить и внутренним образом: это множество граничных точек области, достижимых изнутри.

Что же касается границы области существования многозначной функции, то она состоит, вообще говоря, не из точек комплексной плоскости, а из «идеальных» элементов. Значит, данное выше внутреннее определение не может быть перенесено без изменений на общий случай.

В недавней работе (Mathematica, т. XIX, 1943) **) я сделал попутно несколько замечаний на эту тему, и эти замечания я предполагаю восстановить здесь с некоторыми дополнениями.

Риманова поверхность R, накрывающая комплексную плоскость (z), определяется при помощи топологического многообразия V и внутреннего отображения многообразия V в плоскость (z) [1]. Поскольку все топологические свойства R будут теми же, что и для V, то и

---

*) Впервые опубликовано в «Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine», т. XXVI, 1944, стр. 671—672.

**) См. предыдущее приложение.

[1]) См. мои *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, стр. 151.

граничным элементам римановой поверхности будут отвечать граничные элементы многообразия V. Элемент α (идеальной) границы V определяется при помощи последовательности замкнутых областей Δ_i $(i=1, 2, \ldots)$ многообразия V, удовлетворяющей следующим условиям[2]: 1) граница каждой области Δ_i есть простая замкнутая кривая на V; 2) для любого i область Δ_{i+1} в строгом смысле вложена в Δ_i, и 3) множество, общее всем Δ_i, пусто. Области Δ_i образуют определяющую последовательность граничного элемента α. Эквивалентные определяющие последовательности определяют один и тот же граничный элемент[2].

Рассмотрим теперь путь, лежащий на V и стремящийся к идеальной границе V. Это означает, что если $p(t)$ — точка этого пути, а t — непрерывный параметр $[0 \leqslant t < \infty]$, то для любой области D, замкнутой и компактной в V, и для всех достаточно больших t точка $p(t)$ будет находиться вне D. Это, как легко показать, означает, что, начиная с достаточно большого t, точка $p(t)$ содержится в любой заданной области Δ, входящей в определяющую последовательность некоторого граничного элемента α многообразия V, то есть что путь стремится к граничному элементу α.

Пусть $z=T(p)$ — внутреннее отображение, определяющее R. Если $p(t)$ стремится к элементу α, то непрерывная функция $z = T[p(t)]$ действительного переменного t может как стремиться к некоторой фиксированной точке z_0 плоскости (z), так и не стремиться ни к какому определенному пределу при $t \to \infty$. В первом случае будем говорить, что z_0 есть *особая точка, соответствующая граничному элементу* α римановой поверхности R. Легко убедиться в том, что это определение соответствует классическому понятию особой точки, опирающемуся на понятие аналитического продолжения заданной функции, соответствующей R.

Особые точки, определенные таким способом лишь при помощи R независимо от самой функции, разбиваются на классы, соответствующие различным граничным

---

[2]) См. мои *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, стр. 112.

элементам поверхности R. В самом деле, одному элементу α может соответствовать несколько и даже бесконечное число различных особых точек. С другой стороны, могут быть граничные элементы, которым не соответствует никакая особая точка [что было бы невозможно в случае однозначных функций]. Например, риманова поверхность функции, обратной мероморфной в конечной плоскости, имеет *единственный* граничный элемент, в то время как особые точки (не алгебраические) такой функции являются, как известно, асимптотическими значениями мероморфной функции, число которых может быть равным нулю, конечным или бесконечным.

Вообще, можно заметить, что данное выше определение особых точек произвольной многозначной аналитической функции сводится к обобщению классических результатов Гурвица и Иверсена, относящихся к функциям, обратным мероморфным, риманова поверхность которых порождается именно этой функцией; роль мероморфной функции здесь выполняет внутреннее отображение, определяющее R.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

О МНОГОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ *)

При изучении поведения аналитической функции в окрестности граничных элементов ее римановой поверхности — что в случае однозначных функций сводится к исследованию их в окрестности трансцендентных особенностей — важную роль играет *свойство Иверсена.* Это свойство, принадлежащее, как известно, в частности, и всем функциям, обратным мероморфным функциям в конечной плоскости [1], в самом общем случае тесно связано с теоремами, относящимися к полной неопределенности функции в одном из граничных элементов ее естественной области существования, и с родственными им теоремами [4, 8, 10].

Но для любой аналитической функции наличие или отсутствие упомянутого свойства зависит исключительно от структуры ее римановой поверхности, точнее, от свойств ее как накрывающей поверхности. Значит, полезно определить свойство Иверсена и сформулировать его следствия, исходя из заданной a priori римановой поверхности, рассматриваемой как естественная область существования класса аналитических функций, как обладающих, так и не обладающих этим свойством.

1. Риманова накрывающая поверхность R, определенная [5, 6] при помощи произвольного двумерного многообразия V и внутреннего отображения $z=T(p)$, которое любой точке $p \in V$ ставит в соответствие точку z на римановой сфере S, называется поверхностью *класса* (I) (а функции, соответствующие R, обладают свойством

*) Впервые опубликовано в «Annales de la Société polonaise de mathématiques», т. XXV, 1952, стр. 69—74.

Иверсена), если любому пути l с концами a и b, лежащему на S, и любому $\alpha \in T^{-1}(a)$ можно поставить в соответствие путь λ на V, выходящий из α и оканчивающийся в точке β так, чтобы путь $T(\lambda)$ лежал в любой наперед заданной окрестности пути l, а точка $b'=T(\beta)$ была сколь угодно близка к β.

Таким образом, это определение означает, что асимптотические значения функции $z=T(p)$, соответствующие различным граничным элементам многообразия V (то есть особым точкам функций, соответствующих R), специальным образом распределены относительно поверхности R. Это распределение полностью относится к R, а не к S: поверхность R, асимптотические значения которой образуют на S всюду разрывное множество, очевидно, принадлежит классу (I), в то время как обратное неверно, в чем можно сразу убедиться на известных примерах римановых поверхностей, порожденных некоторыми целыми функциями (такими, как функция Гросса).

2. Очевидно, что в определении предыдущего пункта S можно заменить любой римановой поверхностью R_0 [определенной при помощи V_0 и $z=T_0(p_0)$, где $p_0 \in V_0$] и рассматривать накрывающие R_0 римановы поверхности R, определенные при помощи V и $p_0 = T(p)$, $p \in V$. Таким образом, ясно, что следует понимать под поверхностью *R класса (I) над R_0*, когда R_0 — произвольная риманова поверхность.

Функции многих конкретных классов, рассматриваемые обычно на заданной римановой поверхности R_0 и однозначные или многозначные на ней, имеют римановы поверхности класса (I) над R_0. Такими являются, например, классические абелевы интегралы, для которых R_0 — замкнутая поверхность, абелевы интегралы Р. Неванлинна [7], для которых R_0 открыта, и функции, обратные униформизирующим функциям для произвольной римановой поверхности R_0. То же самое относится к так называемым функциям *класса U* Зейделя и Фростмана [2, 3], которые, как показал Носиро [10], принадлежат классу (I) в круге $|w|<1$, к функциям, определяемым целым соотношением $G(w, z) = 0$ [4], равно как и к функциям, соответствующим римановым поверхностям, гра-

ница которых имеет нулевую гармоническую меру [8], причем как те, так и другие принадлежат классу (I) на сфере значений w.

Из определения предыдущего пункта следует также, что если поверхность R_2 принадлежит классу (I) над R_1, а R_1 является поверхностью класса (I) над R_0, то R_2 является поверхностью класса (I) над R_0.

3. Рассмотрим граничный элемент произвольной римановой поверхности R, и пусть D_i $(i=1, 2, \ldots)$ — определяющие области этого элемента на V (см. [6], стр. 86). Общая часть всех $\overline{T(D_i)}$, где через $\overline{T(D_i)}$ обозначено замыкание множества $T(D_i) \subset R_0$ на R_0, может свестись к единственной точке, и тогда мы будем говорить, что граничный элемент будет *точечным*; это множество может оказаться пустым; тогда мы будем говорить, что граничный элемент является *внешним* для R_0. Граничный элемент называется *полностью распределенным над* R_0, если общая часть множеств $\overline{T(D_i)}$ покрывает всю поверхность R_0 [9]; в других случаях он распределен частично.

Важность понятия поверхности класса (I) состоит именно в том, что у римановых поверхностей R класса (I) над R_0 нет граничных элементов этого последнего типа. Точнее, можно доказать, как мы сделали это для случая, когда R_0 — сфера [4, 8], что *если R есть поверхность класса (I) над R_0, то имеет место один и только один из двух случаев:*

1° *Все граничные элементы R являются точечными или внешними для R_0, и R имеет конечное число листов над R_0.*

2° *Существует хотя бы один граничный элемент R, полностью распределенный над R_0, а остальные либо точечные, либо внешние для R_0. В этом случае R имеет бесконечное число листов над R_0.*

Для функций $w(z)$, порождающих риманову поверхность R [1]), эти два случая соответственно принимают следующий вид:

---

[1]) R как поверхность, накрывающая S, определяется при помощи V и $\dot{z} = T_0[\overline{T}(p)]$. Функции $w(z)$ являются функциями, соответствующими этому определению R.

1° Всякая функция $w(z)$ является обобщенной алгеброидной на R_0, то есть она удовлетворяет соотношению вида

$$w^n + A_1(z)\,w^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0,$$

где $A_i(z)$ — однозначные функции на R_0, которые могут иметь всюду разрывное множество особенностей.

2° Всякая функция $z(w)$, обратная к функции, соответствующей R (в вышеустановленном смысле), является вполне неопределенной *относительно* R_0 по крайней мере в одном из ее граничных элементов [2]), а особые точки $z(w)$, соответствующие точечным граничным элементам, являются обыкновенными трансцендентными точками.

В случае, когда R_0 замкнута, имеющиеся доказательства [4, 8] применимы почти без изменений. В общем случае, когда R_0 имеет граничные элементы, в доказательство надо внести некоторые несущественные изменения [3]).

4. Рассмотрим теперь риманову поверхность R, накрывающую S совершенно произвольным образом, и будем отыскивать области S, над которыми R или какая-либо часть R принадлежит классу (I).

Если мы ограничимся частью R, то такие области — области (I) — всегда будут существовать. В самом деле, пусть C — внутренность круга с центром $z = a$, и пусть Q — компонента множества $T^{-1}(C)$, содержащая фиксированную точку из $T^{-1}(a)$. Если круг C достаточно мал, то $T(Q)$ покрывает весь круг C и часть R, ограниченная условием $Q \subset V$, принадлежит классу (I) над C. Пусть C^* — объединение всех кругов с центром в a, для которых имеет место последнее свойство. Если соответствующая область Q^* содержит граничный элемент поверхности R, то есть если в Q^* содержится некоторая окрестность этого элемента, то можно утверждать, что или

---

[2]) То есть множество предельных значений функции, соответствующих этому граничному элементу, есть $T_0(V_0)$.

[3]) Аналогично [4] доказывается, что точки R_0, покрытые не более чем конечным числом точек из R, образуют на R_0 множество, являющееся объединением не более чем счетного множества всюду разрывных множеств.

этот граничный элемент полностью распределен над C^*, или $w(z)$ есть обобщенная алгеброидная функция на C^* (в Q^*). В самом деле, тогда к части поверхности R, которая является поверхностью, определенной при помощи Q^* и $z=T(p)$, можно применить теорему из предыдущего пункта, причем граничный элемент поверхности R, заключенный в Q^*, будет граничным элементом Q^*.

С другой стороны, не всегда существуют области сферы S, над которыми R была бы поверхностью класса (I), т. е. области, которые являлись бы областями (I) для всей поверхности R. Однако отыскание таких областей, если они существуют, представляет очевидный интерес при изучении R и соответствующих ей функций. Их можно построить следующим образом. Рассмотрим на S все открытые круги Γ, имеющие своими центрами точки некоторого заданного счетного множества E, всюду плотного на S. Если для R существуют области (I), то найдется по крайней мере один такой круг Γ, что каждая компонента множества $T^{-1}(\Gamma)$ будет принадлежать классу (I) над Γ. Пусть Γ^* — объединение всех кругов с фиксированным центром, обладающих этим свойством. Таким образом, каждой точке множества E, для которой существует хотя бы один круг Γ, удовлетворяющий указанному условию, будет поставлен в соответствие круг Γ^*. Кругов Γ^* найдется не более чем счетное множество. Два круга Γ^* будем называть *связанными между собой*, если существует такая конечная цепь кругов Γ^*, соединяющая первый круг со вторым, что любые два последовательных круга Γ^* из этой цепи образуют область на сфере S. Это отношение симметрично и транзитивно. Если объединить все круги Γ^*, связанные между собой, то получим все области (I) относительно R, которые вообще существуют.

Пусть Δ — область (I) для R. Если $T^{-1}(\Delta)$ содержит граничный элемент поверхности R, то можно будет сделать то же замечание, что и в случае, когда мы имели дело с областью (I), для части R. Но здесь, кроме того, можно еще заметить, что все граничные элементы R, хотя бы одна окрестность которых лежит вне $T^{-1}(\Delta)$, являются элементами *неполной* неопределенности,

так как по крайней мере точки Δ не являются для них предельными значениями соответствующих функций $z(w)$.

5. Видно, какую пользу при изучении функций, соответствующих R, можно извлечь из существования для поверхности R хотя бы одного круга Γ [а значит, и хотя бы одной области (I)]. Однако областей (I) для R может и не существовать.

Возьмем, например, комплексную плоскость (u) и сделаем на ней бесконечное число прямолинейных разрезов σ_n (где n пробегает все целые значения), определенных следующим образом:

$$x \geqslant n, \quad y = 2\pi(n + r_n),$$

где r_n — рациональные числа, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant r_n < 1$.

Пусть D — область $(u) - \sum\limits_n \sigma_n$. Для поверхности R, порожденной функцией $z = e^u$, где u описывает D, никакой области (I) не существует.

Наконец, может случиться, что R, не принадлежа классу (I) над S, все же удовлетворяет первой части теоремы 2° пункта 3: например, когда для R существует единственная область (I), всюду плотная в S. Такую поверхность R легко получить, выбрасывая из каждого листа римановой поверхности функции $\log z$ точки, проектирующиеся в один и тот же конечный отрезок прямой.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions meromorphes (диссертация, Хельсинки, 1914).

2. W. Seidel, On the distribution of values of bounded analytic functions (Trans. Am. Math. Soc., т. 36, 1934).

3. O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles (диссертация, Лунд, 1935).

4. S. Stoïlow, Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de Riemann ont des frontiéres totalement discontinues (Mathematica, т. 12, Клуж, 1936).
   С. Стоилов, Об аналитических функциях, римановы поверхности которых имеют всюду разрывные границы (см. приложение I к настоящей книге).

5. S. Stoïlow, Sur la définition des surfaces de Riemann (Comptes Rendus du Congrés Intern. des Mathém., Осло, т. II, 1936, стр. 143).

6. S. Stoïlow, Leçon sur les principes topologiques de la theorie des fonctions analytiques, Париж, 1938.
   С. Стоилов, Лекции о топологических принципах теории аналитических функций (см. настоящую книгу).

7. R. Nevanlinna, Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (Ann. Acad. Sc. Fenniciae, серия A, т. 1, 1941).

8. S. Stoïlow, Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de Riemann a sa frontiére de mesure harmonique nulle (Mathematica, т. 19, Клуж, 1943).
   С. Стоилов, Об особенностях многозначных аналитических функций, граница римановых поверхностей которых имеет гармоническую меру нуль (см. приложение II к настоящей книге).

9. S. Stoïlow, Quelques remarques sur les éléments frontiéres des surfaces de Riemann et sur les fonctions correspondant à ces surfaces (C. R. Acad. Sc., т. 227, 1948, стр. 1326—1328).

10. K. Noshiro, Contribution to the theory of the singularities of analytic functions (Japanese Journal of Mathematicas, т. 19, 1948).

Симеон Стоилов

Лекции о топологических принципах теории аналитических функций

М., 1964 г. 228 стр. с илл.

Редактор *В. А. Зорич*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*
Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 6/IV 1964 г. Подписано к печати 25/VIII 1964 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 7,125. Условн. печ. л. 11,68. Уч.-изд. л. 10,71. Тираж 6200 экз. Цена книги 74 коп. Заказ № 320.

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
«Главполиграфпрома» Государственного
комитета Совета Министров СССР по печати.
Измайловский проспект, 29.

0-37

ЛЕКЦИИ О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРИНЦИПАХ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ